Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE†
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 26. OKTOBER 1961)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Math. Z.

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

---

77. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Ribenboim, P., Fonctions modulo un antifiltre 195
Behrens, E.-A., Einreihige Ringe 207
Kasch, F., Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen 219
Roquette, P., Über den Singularitätsgrad von Teilringen in Funktionenkörpern . . 228
Pickert, G., Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen 241
Kowalsky, H.-J., Kategorien topologischer Räume 249
Hlawka, E., Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod. 1 273
Neubauer, G., Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale 285

Ribenboim, P.
Math. Zeitschr. 77, 195—206 (1961)

Fonctions modulo un antifiltre

Dédié à M. Friedrich Karl Schmidt à l'occasion de son 60ème anniversaire

Par
Paulo Ribenboim

Soit G un ensemble de fonctions définies sur l'ensemble X et à valeurs dans l'ensemble Y. Supposons donné un antifiltre A de l'algèbre de Boole $\mathscr{B}(X)$ des parties de X, c'est-à-dire, un ensemble A de parties de X, tel que: 1. $\emptyset \in A$, 2. si M, $N \in A$ alors $M \cup N \in A$, 3. si $M \in A$, $N \subset M$ alors $N \in A$. Comme il est bien connu, si on considère sur $\mathscr{B}(X)$ la structure d'anneau de Boole associée, alors les antifiltres sont exactement les idéaux de l'anneau de Boole. Pour écarter le cas trivial, nous supposerons, sauf mention du contraire, que $X \notin A$, pour tout antifiltre A.

Si M, $N \subset X$ posons $M \equiv N(A)$ lorsque la différence symétrique $M \ominus N = (M \cup N) - (M \cap N) \in A$; c'est une relation d'équivalence dont les classes forment l'algèbre de Boole quotient $\overline{\mathscr{B}(X)}$ (qui correspond à l'anneau de Boole quotient de $\mathscr{B}(X)$ par l'idéal A); notons $\varphi: \mathscr{B}(X) \to \overline{\mathscr{B}(X)}$ l'application canonique de passage au quotient.

Si f, $g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. C'est une relation d'équivalence, dont l'ensemble de classes sera noté $\overline{G}$ et la classe de $f \in G$ sera notée $\bar{f}$.

Pour chaque $f \in G$ considérons l'homomorphisme $f^{-1}: \mathscr{B}(Y) \to \mathscr{B}(X)$, défini par $f^{-1}(Q) = \{x \in X \mid f(x) \in Q\}$.

Lemme 1. *Si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie Q de Y on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

En effet, soit $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. Si $M = f^{-1}(Q)$, $N = g^{-1}(Q)$ alors $M \ominus N = [(M \ominus N) \cap X_0] \cup [(M \ominus N) \cap \mathscr{C} X_0] \in A$ car $(M \ominus N) \cap \mathscr{C} X_0 = \emptyset$.

Ainsi, à chaque classe $\bar{f} \in \overline{G}$ nous associons l'homomorphisme $\theta_{\bar{f}}: \mathscr{B}(Y) \to \overline{\mathscr{B}(X)}$, défini par $\theta_{\bar{f}} = \varphi \circ f^{-1}$ (où f est une fonction quelconque de la classe $\bar{f}$).

Question: trouver des conditions sur l'antifiltre A, sur les ensembles X, Y et G qui soient suffisantes pour que l'application $\theta: \bar{f} \to \theta_{\bar{f}}$ soit biunivoque.

Tout d'abord, au n° 1, nous obtenons des résultats généraux qui ne présupposent aucune structure sur les ensembles X, Y et sur la nature des fonctions de G:

1. si A est un antifiltre principal, alors θ est biunivoque (en particulier, c'est le cas lorsque X est fini)

2. si Y est fini, alors θ est biunivoque, quel que soit l'antifiltre A

3. si A est l'antifiltre de toutes les parties finies de X alors θ est biunivoque

4. plus généralement, si $\text{pot}(Y)=\aleph$ (nombre cardinal arbitraire $\aleph \geqq \aleph_0$), si A est contenu dans l'antifiltre de toutes les parties de X ayant puissance strictement inférience à $\aleph$, alors θ est biunivoque

5. si $\text{pot}\, Y=\aleph$ (nombre cardinal arbitraire $\aleph \geqq \aleph_0$), si A est un $\aleph$-antifiltre (p. 198) de X, alors θ est biunivoque.

Remarquons d'ailleurs qu'on peut toujours se ramener au cas où $\text{pot}(X) \geqq \text{pot}(Y)$.

Nous sommes inclinés à croire que l'application θ ne soit pas *toujours* biunivoque; néanmoins, nous ne connaissons aucun exemple où cela se produise.

Au n° 2, nous considérons une question analogue, en faisant plus d'hypothèses, et nous obtenons les résultats qui suivent.

Soit X un ensemble, $\mathscr{L}(X)$ une σ-algèbre de Boole, sous-algèbre de celle de toutes les parties de X, avec $\emptyset, X \in \mathscr{L}(X)$. Soit Y un groupe abélien additif métrique, soit $\mathscr{L}(Y)=\{V(y, 1/n) \mid y \in Y, n>0\}$ où $V(y, 1/n)=\{y' \in Y \mid d(y, y')<1/n\}$. Supposons que pour tout $n>0$ il existe une famille dénombrable $\{y_1^{(n)}, \ldots, y_m^{(n)}, \ldots\}$ d'éléments de Y, de façon que $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty} V(y_i^{(n)}, 1/n)$. Soit G un groupe abélien additif de fonctions de X à valeurs dans Y et supposons que si $f \in G$, $Q \in \mathscr{L}(Y)$ alors $f^{-1}(Q) \in \mathscr{L}(X)$. Soit A un $\aleph_0$-antifiltre de $\mathscr{L}(X)$. Si $M, N \in \mathscr{L}(X)$ posons $M \equiv N(A)$ lorsque $M \ominus N \in A$. Si $f, g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque $X_0=\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$. Alors:

1. si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)\ (A)$

2. si $f \not\equiv g(A)$ alors il existe $Q \in \mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)\ (A)$.

Si θ est l'application qui à chaque classe $\bar{f}$ de fonctions de G associe $\theta_{\bar{f}}=\varphi \circ f^{-1}$, homomorphisme de $\mathscr{L}(Y)$ dans $\mathscr{L}(X)/A$ (où φ: $\mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(X)/A$ désigne l'application canonique), ces résultats signifient que θ est biunivoque.

Un corollaire intéressant est le suivant:

Soit G l'ensemble des fonctions mésurables (au sens de Lebesgue), définies sur la droite réelle $X=R$ et à valeurs dans la droite réelle $Y=R$. Soit $\mathscr{L}(X)$ la σ-algèbre de Boole des ensembles mésurables de X, soit $\mathscr{L}(Y)$ la σ-algèbre de Boole des sous-ensembles de Y engendrés par les intervalles semi-ouverts à droite. Soit A le $\aleph_0$-antifiltre des ensembles de $\mathscr{L}(Y)$ ayant mésure nulle. Alors:

1. si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)\ (A)$

2. si $f \not\equiv g(A)$ alors il existe une partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ telle que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)\ (A)$.

Au n° 3, nous considérons une question distincte. Etant donnés des ensembles X, Y et un homomorphisme θ de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(Y)=X$ et $\theta(\emptyset)=\emptyset$, est-ce qu'il existe une application f: $X \to Y$ telle que $\theta=f^{-1}$? Nous démontrons que pour cela il faut et il suffit que θ préserve des intersections arbitraires. Ceci est obtenu comme corollaire d'un théorème.

Ensuite, nous considérons ce problème: données des sous-algèbres de Boole $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ de $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$ respectivement, où Y est un groupe abélien

additif, et donné un ensemble G d'applications de X dans Y telles que $f^{-1}(Q)\in\mathscr{V}(X)$ lorsque $Q\in\mathscr{V}(Y)$, trouver des conditions suffisantes pour que G soit un sous-groupe de celui de toutes les applications de X dans Y.

Enfin, si X est un espace topologique, si Y est un espace topologique compact, si $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ désignent les réticulés des ensembles fermés de X, Y, resp., si $f\colon X\to Y$ est une fonction continue, telle que $f(X)=Y$, alors l'application $\theta=f^{-1}\colon \mathscr{V}(Y)\to\mathscr{V}(X)$ satisfait: 1. $\theta^{-1}(Q)=\emptyset$ si et seulement si $Q=\emptyset$ (où $Q\in\mathscr{V}(Y)$), 2. $\theta^{-1}(Y)=X$, 3. si $x\in\theta(Q)$, où $Q\in\mathscr{V}(Y)$, il existe $Q'\in\mathscr{V}(Y)$ tel que $x\in\theta(Q')$ et $\theta(Q)\cap\theta(Q')=\emptyset$.

Réciproquement, si on suppose en outre que Y est totalement discontinu et si $\theta\colon \mathscr{V}(Y)\to\mathscr{V}(X)$ est un homomorphisme de réticulé, satisfaisant les conditions 1, 2, 3, ci-dessus, alors il existe une fonction continue $f\colon X\to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour toute partie $Q\in\mathscr{V}(Y)$.

Les problèmes considérés dans cette note ont été suggerés par l'article de Krull „Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen", Math. Z. **64**, 10—40 (1956).

Nous voulons remercier notre collègue Alex Heller. Il nous a fait remarquer que le résultat (4) du n° 1 s'obtenait du troisième, avec démonstration analogue. De même, la démonstration ici présentée du corollaire au théorème 5 est dûe à lui.

1.

Commençons avec une remarque.

Soient X, Y des ensembles quelconques, G un ensemble de fonctions de X dans Y, A un antifiltre de parties de X ($X\notin A$) et soit θ l'application qui à chaque classe de fonctions $\bar{f}$ associe $\theta_{\bar{f}}=\varphi\circ f^{-1}\colon \mathscr{B}(Y)\to\overline{\mathscr{B}(X)}$ (cf. ces définitions et notations à l'Introduction). S'il s'agit de montrer que θ est biunivoque, c.a.d. si $f\not\equiv g(A)$ il existe $Q\subset Y$ telle que $f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)\notin A$, nous pouvons nous restreindre sans perte de généralité au cas où $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$.

En effet, soit $X_0=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}\notin A$, soit $A_0=\{M\cap X_0\mid M\in A\}$ donc A_0 est un antifiltre de parties de X_0; soient f_0, g_0 les restrictions de f, g à X_0; alors $f_0\not\equiv g_0(A_0)$ $f_0(x)\neq g_0(x)$ pour tout $x\in X_0$. Ainsi, il existerait $Q\subset Y$ telle que $f_0^{-1}(Q)\ominus g_0^{-1}(Q)\notin A_0$; or, de $f_0^{-1}(Q)=X_0\cap f^{-1}(Q)$, $g_0^{-1}(Q)=X_0\cap g^{-1}(Q)$ vient $X_0\cap[f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)]=f_0^{-1}(Q)\ominus g_0^{-1}(Q)\notin A_0$ donc $f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)\notin A$.

Théorème 1. *Si A est un antifiltre principal, $A=\{N\in\mathscr{B}(X)\mid N\subset M\}$ (où $M\subset X$, $M\neq X$) alors l'application θ est biunivoque.*

Démonstration: Soient $f, g\in G$ telles que $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$. Soit $x_0\in X$, $x_0\notin M$ et $y_0=f(x_0)$; alors $f^{-1}(y_0)\ominus g^{-1}(y_0)=f^{-1}(y_0)\cup g^{-1}(y_0)\notin A$ car $x_0\in f^{-1}(y_0)$, $x_0\notin M$, et $f^{-1}(y_0)\cap g^{-1}(y_0)=\emptyset$.

Théorème 2. *Si Y est fini, l'application θ est biunivoque, quel que soit l'antifiltre A.*

Démonstration: Soient $f, g\in G$ telles que $f(x)\neq g(x)$ pour tout $x\in X$. Il existe $y_0\in Y$ tel que $f^{-1}(y_0)\notin A$, sinon on aurait $X=\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)\in A$, car Y

est fini, ce qui est absurde. Ceci étant, $f^{-1}(y_0) \ominus g^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0) \cup g^{-1}(y_0) \notin A$, car $f^{-1}(y_0) \notin A$ et $f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(y_0) = \emptyset$.

THÉORÈME 3. *Si* $\text{pot}(Y) = \aleph$ $(\aleph \geqq \aleph_0)$ *et si* A *est un antifiltre contenu dans l'antifiltre de toutes les parties de* X *ayant puissance strictement inférieure à* $\aleph$, *alors l'application* θ *est biunivoque.*

DÉMONSTRATION: Si $X \in A$ alors $f \equiv g(A)$ quels que soient $f, g \in G$ et l'affirmation du théorème est vide. Ainsi, nous pouvons supposer $X \notin A$. Par la remarque faite au début, si $f, g \in G$, $f \not\equiv g(A)$, on peut supposer sans perte de généralité que $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$.

Pour tout $y \in Y$ on a $f^{-1}(y) \ominus g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) \in A$ sinon le théorème serait déjà vrai pour une partie $Q = \{y_0\}$; remarquons qu' on a aussi $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(y) = \emptyset$ pour tout $y \in Y$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties Q de Y telles que $f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$; donc $\mathscr{F}$ n'est pas vide. Ordonné par inclusion, $\mathscr{F}$ est inductif, car si $(Q_\alpha)_\alpha$ est une famille totalement ordonnée, $Q_\alpha \in \mathscr{F}$, si $Q' = \bigcup_\alpha Q_\alpha$, alors $f^{-1}(Q') \cap g^{-1}(Q') = \emptyset$, puisque si $f(x), g(x) \in Q'$ il existerait α tel que $f(x), g(x) \in Q_\alpha$, ce qui serait absurde.

Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal Q de $\mathscr{F}$; alors $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) = f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)$ puisque $f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$. Si c'était $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \notin A$ le théorème serait vrai. Ainsi, supposons que $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \in A$, donc par hypothese $\text{pot}\left(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)\right) < \aleph$. Soit $\widetilde{Q} = f\left(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)\right) \cup g\left(f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)\right)$ donc $\text{pot}(\widetilde{Q}) < \aleph = \text{pot}(Y)$ et il existe $y_0 \in Y$, $y_0 \notin \widetilde{Q}$. Soit $Q' = Q \cup \{y_0\}$. Alors $f^{-1}(Q') \cap g^{-1}(Q') = [f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(y_0)] \cap [g^{-1}(Q) \cup g^{-1}(y_0)] = [f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(Q)] \cup [f^{-1}(Q) \cap g^{-1}(y_0)] \cup [f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(Q)] \cup [f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(y_0)] = \emptyset$, car si $x \in f^{-1}(Q)$ alors $g(x) \in \widetilde{Q}$ donc $g(x) \neq y_0$, et de même $f^{-1}(y_0) \cap g^{-1}(Q) = \emptyset$. Ainsi $Q' \in \mathscr{F}$, $Q \subset Q'$, $Q \neq Q'$, ce qui contradit la maximalité de Q. Ainsi, ce dernier cas ne peut pas se produire, et le théorème est vrai.

COROLLAIRE. *Si* A *est l'antifiltre de toutes les parties finies de* X *alors l'application* θ *est biunivoque.*

En effet, si Y est fini, c'est le théorème 2, si Y est infini alors $\text{pot}(Y) \geqq \aleph_0$ et on est réduit au théorème 3.

Remarquons qu'on peut obtenir une démonstration de ce corollaire directement sans utiliser le lemme de Zorn. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

DÉFINITION. Un *antifiltre* A de parties d'un ensemble X est dit un $\aleph$-antifiltre (où $\aleph$ est un nombre cardinal infini) lorsque: si $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille de parties $X_\alpha \in A$ et $\text{pot}(I) \leqq \aleph$ alors $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \in A$.

Tout antifiltre principal est un $\aleph$-antifiltre, quel que soit le nombre cardinal $\aleph$.

Si X est un ensemble ayant puissance au plus égale à $\aleph$, alors tout $\aleph$-antifiltre A de parties de X est nécessairement principal.

En effet, soit $X_0 = \{x \in X \mid \{x\} \in A\}$. De $\text{pot}(X_0) \leqq \text{pot}(X) \leqq \aleph$ il résulte que $X_0 \in A$ et il est clair que tout élément de A est alors une partie de X_0.

Par contre, si $\aleph < \mathrm{pot}(X)$, on peut toujours trouver des $\aleph$-antifiltres de parties de X qui ne sont pas principaux. Par exemple, la famille des parties de X ayant puissance au plus égale à $\aleph$ est un antifiltre non principal de parties de X.

THÉORÈME 4. *Si* $\mathrm{pot}(Y) = \aleph \geqq \aleph_0$ *et si* A *est un* $\aleph$*-antifiltre de parties de* X *alors l'application* θ *est biunivoque.*

DÉMONSTRATION: Si $\mathrm{pot}(X) \leqq \aleph$ alors A est un antifiltre principal et le théorème est vrai. Supposons donc $\mathrm{pot}(X) \geqq \mathrm{pot}(Y)$. Soient $f, g \in G$, $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$ (car si $X \in A$ l'affirmation serait vide).

Pour chaque $M_\alpha \subset X$ ayant complémentaire $\mathscr{C} M_\alpha \in A$ (donc $M_\alpha \notin A$) soit $\mathscr{E}_{M_\alpha}$ l'ensemble des parties *non vides* Q de Y telles que:

$$\text{(E)} \qquad \emptyset \neq [f^{-1}(Q) \cup g^{-1}(Q)] \cap M_\alpha \in A_{M_\alpha} = \{N \cap M_\alpha \mid N \in A\}.$$

Il est clair que $Y \notin \mathscr{E}_{M_\alpha}$, car $M_\alpha \notin A$.

Premier Cas. Supposons qu'il existe $M \subset X$, ayant complémentaire $\mathscr{C} M \in A$ et tel que $\mathscr{E}_{M_\alpha} = \emptyset$.

Soit $y \in f(M) \cup g(M)$. On a $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(y) = \emptyset$, car $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in X$. On a aussi $[f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)] \cap M \neq \emptyset$. De $\mathscr{E}_M = \emptyset$ il résulte que $[f^{-1}(y) \ominus g^{-1}(y)] \cap M = [f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)] \cap M \in A_M$, donc $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) \notin A$ et le théorème est vrai, avec $Q = \{y\}$.

Second Cas. Supposons que pour toute partie M_α de X ayant complémentaire $\mathscr{C} M_\alpha \in A$ on ait $\mathscr{E}_{M_\alpha} \neq \emptyset$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples $\Phi = (\mathscr{M}, \mathscr{Q})$ où:

$\mathscr{M}$ est un ensemble de parties M_α de X telles que:

(M 1) $\mathscr{C} M_\alpha \in A$ (donc $M_\alpha \notin A$)

(M 2) $\mathscr{M}$ est un ensemble totalement ordonné, strictement décroissant, bien ordonné;

$\mathscr{Q}$ est un ensemble de parties de Y telles que:

(Q 1) à chaque $M_\alpha \in \mathscr{M}$ correspond biunivoquement un ensemble $Q_\alpha \in \mathscr{E}_{M_\alpha}$

(Q 2) les ensembles $Q_\alpha \in \mathscr{Q}$ forment un ensemble totalement ordonné strictement croissant bien ordonné

(Q 3) pour tout $M_\alpha \in \mathscr{M}$, distinct du dernier élément de $\mathscr{M}$ (s'il en existe) on a $M_{\alpha+1} = M_\alpha - \{[f^{-1}(Q_\alpha) \cup g^{-1}(Q_\alpha)] \cap M_\alpha\}$ (donc $M_{\alpha+1} \neq M_\alpha$ car $Q_\alpha \in \mathscr{E}_{M_\alpha}$ donc $[f^{-1}(Q_\alpha) \cup g^{-1}(Q_\alpha)] \cap M_\alpha \neq \emptyset$)

(Q 4) si $Q = \bigcup_{Q_\alpha \in \mathscr{Q}} Q_\alpha$ alors $f^{-1}(Q) \ominus g^{-1}(Q) \in A$.

$\mathscr{F}$ n'est pas vide. En effet, soit $\mathscr{M}_0 = \{X\}$, $\mathscr{Q}_0 = \{Q\}$ où $Q \in \mathscr{E}_X$ (car $\mathscr{E}_X \neq \emptyset$). Alors $(\mathscr{M}_0, \mathscr{Q}_0) \in \mathscr{F}$.

Ordonnons $\mathscr{F}$, en posant $(\mathscr{M}, \mathscr{Q}) \leqq (\mathscr{M}', \mathscr{Q}')$ lorsque: $\mathscr{M}$ est un segment initial de $\mathscr{M}'$, $\mathscr{Q}$ est un segment initial de $\mathscr{Q}'$ et la correspondance biunivoque entre les ensembles de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{Q}$ est la restriction de la correspondance biunivoque entre les ensembles de $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{Q}'$.

Soit $(\Phi_\sigma)_\sigma$, $\Phi_\sigma=(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{Q}_\sigma)\in\mathcal{F}$, une famille totalement ordonnée croissante d'éléments de $\mathcal{F}$; soit $\Phi=(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$ où $\mathcal{M}=\bigcup_\sigma \mathcal{M}_\sigma$, $\mathcal{Q}=\bigcup_\sigma \mathcal{Q}_\sigma$. Alors Φ satisfait les conditions $(M\,1)$, $(M\,2)$, $(Q\,1)$, $(Q\,2)$, $(Q\,3)$, comme on le vérifie aisément.

Si Φ ne satisfait pas la condition $(Q\,4)$, soit $Q=\bigcup_{Q_\alpha\in\mathcal{Q}} Q_\alpha$, donc $f^{-1}(Q)\ominus g^{-1}(Q)\notin A$ et le théorème est démontré.

Ainsi, nous pouvons supposer que pour toute famille totalement ordonnée croissante $(\Phi_\sigma)_\sigma$ le couple Φ (défini ci-dessus) satisfait aussi la condition $(Q\,4)$; alors $\Phi\in\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est donc un ensemble ordonné inductif, car Φ est la borne supérieure de la famille $(\Phi_\sigma)_\sigma$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ possède au moins un élément maximal, qui nous noterons $\Phi=(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$.

Deux cas sont alors possibles.

A) Supposons qu'il existe M_β, le plus petit élément de $\mathcal{M}$ (donc $M_\beta\notin A$ et alors $M_\beta\neq\emptyset$).

Soit $Q'=Q_\beta\in\mathcal{E}_{M_\beta}$ (donc $Q'\neq Y$) correspondant à M_β (par $(Q\,1)$) et considérons $\widetilde{M}=M_\beta-\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}$. On a $\emptyset\neq[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\in A_{M_\beta}\subset A$ donc $\widetilde{M}\subset M_\beta$, $\widetilde{M}\neq M_\beta$ et ainsi $\widetilde{M}\notin\mathcal{M}$.

De même, $\mathcal{C}\widetilde{M}=\mathcal{C}M_\beta\cup\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}\in A$ car $\mathcal{C}M_\beta\in A$; donc $\widetilde{M}\notin A$ et ainsi $\widetilde{M}\neq\emptyset$.

Notons $\widetilde{Y}=\mathcal{C}Q'=\mathcal{C}\left(\bigcup_{Q_\alpha\in\mathcal{Q}} Q_\alpha\right)$; alors $Q'\neq Y$ entraîne $\widetilde{Y}\neq\emptyset$ et on a $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}$, car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$.

B) Supposons que $\mathcal{M}$ ne contient pas un plus petit élément.

Par $(Q\,2)$ l'ensemble $\mathcal{Q}=(Q_\alpha)_\alpha$ étant totalement ordonné strictement croissant, bien ordonné, il a une puissance au plus égale à $\mathrm{pot}(Y)=\aleph$; donc, par $(Q\,1)$, il en est de même pour l'ensemble $\mathcal{M}=(M_\alpha)_\alpha$. Or, A étant un $\aleph$-antifiltre et $\mathcal{C}M_\alpha\in A$ alors $\bigcup_{M_\alpha\in\mathcal{M}}\mathcal{C}M_\alpha=\mathcal{C}\left(\bigcap_{M_\alpha\in\mathcal{M}} M_\alpha\right)\in A$, c'est-à-dire, l'ensemble $\widetilde{M}=\bigcap_\alpha M_\alpha\notin\mathcal{M}$ a un complémentaire $\mathcal{C}\widetilde{M}\in A$, donc $\widetilde{M}\notin A$ et ainsi $\widetilde{M}\neq\emptyset$. Soit $Q'=\bigcup_\alpha Q_\alpha$.

On a $Q'\neq Y$ car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$; en effet, si $x\in\widetilde{M}=\bigcup_\alpha M_\alpha$ et par exemple $f(x)\in Q'=\bigcup_\alpha Q_\alpha$, il existe α tel que $f(x)\in Q_\alpha$; or, M_α n'étant pas le dernier élément de $\mathcal{M}$, alors $x\in M_{\alpha+1}$ donc $x\in M_{\alpha+1}\cap[f^{-1}(Q_\alpha)\cup g^{-1}(Q_\alpha)]\cap M_\alpha$, ce qui est contraire à $(Q\,3)$.

Notons $\widetilde{Y}=\mathcal{C}Q'$ donc $\widetilde{Y}\neq\emptyset$ (car $Q'\neq Y$); enfin, $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}$, car $[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}=\emptyset$.

Ainsi, nous venons de montrer dans les cas (A), (B) l'existence de $\widetilde{M}\subset X$, tel que $\widetilde{M}\notin\mathcal{M}$, $\widetilde{M}\subset M_\alpha$ pour tout $M_\alpha\in\mathcal{M}$, $\mathcal{C}\widetilde{M}\in A$, $\widetilde{M}\neq\emptyset$ et $f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})\subset\widetilde{Y}\neq\emptyset$, où $\widetilde{Y}=\mathcal{C}Q'$ et $Q'=\bigcup_{Q_\alpha\in\mathcal{Q}} Q_\alpha$.

Soit $\mathcal{E}_{\widetilde{M}}$ l'ensemble des parties *non vides* Q de $\widetilde{Y}$ telles que:

$$(\widetilde{E}) \qquad \emptyset\neq[f^{-1}(Q)\cup g^{-1}(Q)]\cap\widetilde{M}\in A_{\widetilde{M}}=\{N\cap\widetilde{M}\mid N\in A\}.$$

Si $\mathscr{E}_{\widetilde{M}}=\emptyset$, soit $y\in f(\widetilde{M})\cup g(\widetilde{M})$; de $f^{-1}(y)\cap g^{-1}(y)=\emptyset$ et $[f^{-1}(y)\cup g^{-1}(y)]\cap \widetilde{M}\neq\emptyset$ résulte que $[f^{-1}(y)\ominus g^{-1}(y)]\cap\widetilde{M}=[f^{-1}(y)\cup g^{-1}(y)]\cap\widetilde{M}\notin A_{\widetilde{M}}$ et ainsi nécessairement $f^{-1}(y)\ominus g^{-1}(y)\notin A$; le théorème est donc démontré.

Si, par contre, $\mathscr{E}_{\widetilde{M}}\neq\emptyset$, soit $Q''\in\mathscr{E}_{\widetilde{M}}$ (donc $\emptyset\neq Q'\subset\widetilde{Y}$) et soit $\widetilde{Q}=Q'\cup Q''$; de $Q''\subset\widetilde{Y}$ vient $Q'\cap Q''=\emptyset$, donc $Q'\subset\widetilde{Q}$, $Q'\neq\widetilde{Q}$.

Posons $\widetilde{\Phi}=(\widetilde{\mathscr{M}},\widetilde{\mathscr{Q}})$, où $\widetilde{\mathscr{M}}=\mathscr{M}\cup\{\widetilde{M}\}$, $\widetilde{\mathscr{Q}}=\mathscr{Q}\cup\{\widetilde{Q}\}$. Alors $\widetilde{\Phi}$ satisfait $(M\,1)$, $(M\,2)$, $(Q\,1)$, $(Q\,2)$, $(Q\,3)$. Les seules vérifications qui méritent un peu d'attention sont celles de $(Q\,1)$ et $(Q\,3)$.

Pour vérifier $(Q\,1)$ il suffit de montrer que $\widetilde{Q}\neq\emptyset$ satisfait

$$\emptyset\neq[f^{-1}(\widetilde{Q})\cup g^{-1}(\widetilde{Q})]\cap\widetilde{M}\in A_{\widetilde{M}}.$$

Or,

$$[f^{-1}(\widetilde{Q})\cup g^{-1}(\widetilde{Q})]\cap\widetilde{M}=\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap\widetilde{M}\}\cup\{[f^{-1}(Q'')\cup g^{-1}(Q'')]\cap\widetilde{M}\}$$
$$=[f^{-1}(Q'')\cup g^{-1}(Q'')]\cap\widetilde{M}$$

(par construction de Q') et ce dernier ensemble est non vide et appartient à $A_{\widetilde{M}}$, car $Q''\in\mathscr{E}_{\widetilde{M}}$.

Pour vérifier $(Q\,3)$, il suffit de le faire dans le cas (A), en montrant que $\widetilde{M}=M_\beta-\{[f^{-1}(Q')\cup g^{-1}(Q')]\cap M_\beta\}$ ce qui est vrai par définition de $\widetilde{M}$.

Puisque $\Phi<\widetilde{\Phi}$ strictement (car $\widetilde{M}\notin\mathscr{M}$, $\widetilde{Q}\notin\mathscr{Q}$) alors $\widetilde{\Phi}$ ne satisfait pas $(Q\,4)$, en vertu de la maximalité de Φ.

Ainsi $f^{-1}(\widetilde{Q})\ominus g^{-1}(\widetilde{Q})\notin A$ et le théorème est démontré.

2.

Soit X un ensemble (supposé infini, pour écarter le cas trivial), soit $\mathscr{L}(X)$ une σ-algèbre de Boole de parties de X, qui soit une sous-algèbre de $\mathscr{B}(X)$ et telle que $\emptyset$, $X\in\mathscr{L}(X)$.

Soit Y un groupe abélien additif métrique, muni de la distance d. Pour tout $y\in Y$ et entier $n>0$ soit $V(y,1/n)=\{y'\in Y\mid d(y,y')<1/n\}$ et soit $\mathscr{L}(Y)=\{V(y,1/n)\mid y\in Y,\ n>0\}$.

Supposons que pour tout entier $n>0$ il existe une famille dénombrable $\{y_1^{(n)},\ldots,y_m^{(n)},\ldots\}$ d'éléments de Y tels que $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}V(y_i^{(n)},1/n)$.

Il résulte que $V(0,1/m)$ est la réunion (dénombrable) de tous les $V(y_j^{(n)},1/n)$ qui soient contenus dans $V(0,1/m)$.

En effet, $V(0,1/m)$ contient une telle réunion. Réciproquement, soit $y\in V(0,1/m)$, c'est-à-dire $d(y,0)<1/m$, soit n un entier assez grand tel que $2/n<1/m-d(y,0)$. Par l'hypothèse, il existe $y_i^{(n)}$ tel que $y\in V(y_i^{(n)},1/n)$, c'est-à-dire $d(y_i^{(n)},y)<1/n$; montrons que $V(y_i^{(n)},1/n)\subset V(0,1/m)$; si $y'\in V(y_i^{(n)},1/n)$ alors $d(y',y_i^{(n)})<1/n$ donc $d(y',0)\leqq d(y',y_i^{(n)})+d(y_i^{(n)},y)+d(y,0)<1/n+1/n+d(y,0)<1/m$.

Soit G un groupe abélien additif de fonctions de X à valeurs dans Y et telles que si $f\in G$, $Q\in\mathscr{L}(Y)$ alors $f^{-1}(Q)\in\mathscr{L}(X)$.

Remarquons que si $f, g \in G$, si $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ alors $X_0 \in \mathscr{L}(X)$. En effet, on a

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{y_i^{(n)}} \left[\{x \in X \mid d\left(f(x), y_i^{(n)}\right) \geqq 1/n\} \cap \{x \in X \mid d\left(y_i^{(n)}, g(x)\right) < 1/n\}\right],$$

car si $f(x) \neq g(x)$ il existe n tel que $d\left(f(x), g(x)\right) > 2/n$; soit $y_i^{(n)}$ tel que $d\left(y_i^{(n)}, g(x)\right) < 1/n$ alors $d\left(f(x), y_i^{(n)}\right) \geqq 1/n$; réciproquement, s'il existe n et $y_i^{(n)} \in Y$ tels que $d\left(f(x), y_i^{(n)}\right) \geqq 1/n$, $d\left(y_i^{(n)}, g(x)\right) < 1/n$ alors nécessairement $f(x) \neq g(x)$.

Remarquons maintenant que pour tout $y \in Y$ on a $\{x \in X \mid d\left(f(x), y\right) \geqq 1/n\} = \mathscr{C} f^{-1}\left(V(y, 1/n)\right) \in \mathscr{L}(X)$ et $\{x \in X \mid d\left(y, g(x)\right) < 1/n\} = g^{-1}\left(V(y, 1/n)\right) \in \mathscr{L}(X)$; $\mathscr{L}(X)$ étant une σ-sous-algèbre de Boole de $\mathscr{B}(X)$, il résulte que $X_0 \in \mathscr{L}(X)$.

Soit maintenant A un $\aleph_0$-antifiltre de $\mathscr{L}(X)$, c.a.d. un sous-ensemble de $\mathscr{L}(X)$ tel que: 1. $\emptyset \in A$; 2. si $M, N \in \mathscr{L}(X)$, $M \subset N \in A$ alors $M \in A$; 3. si $(M_i)_i$ est une suite dénombrable de parties $M_i \in A$ alors $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \in A$.

Si $M, N \in \mathscr{L}(X)$ alors $M \ominus N = (M \cap \mathscr{C} N) \cup (\mathscr{C} M \cap N) \in \mathscr{L}(X)$. Posons $M \equiv N$ (A) lorsque $M \ominus N \in A$.

De même, si $f, g \in G$ posons $f \equiv g(A)$ lorsque $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$ (on a vu que X_0 appartient à $\mathscr{L}(X)$).

On vérifie aussitôt que ces relations sont des équivalences dans $\mathscr{L}(X)$ et G respectivement.

De même, comme au lemme 1, on démontre:

Si $f \equiv g(A)$ alors pour toute partie $Q \in \mathscr{L}(Y)$ on a $f^{-1}(Q) \equiv g^{-1}(Q)$ (A).

THÉORÈME 5. *Avec ces hypothèses et notations, si $f, g \in G$, $f \not\equiv g(A)$ il existe $Q \in \mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q) \not\equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

DÉMONSTRATION: Soient $f, g \in A$, $f \not\equiv g(A)$, donc $X_0 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{L}(X)$, mais $X_0 \notin A$.

Soit $M_n = \{x \in X \mid d\left(f(x), g(x)\right) \geqq 1/n\} = \{x \in X \mid d\left(h(x), 0\right) \geqq 1/n\}$, où $h = f - g \in G$; alors $\mathscr{C} M_n = h^{-1}\left(V(0, 1/n)\right)$, donc de $h \in G$ vient $\mathscr{C} M_n \in \mathscr{L}(X)$ et alors $M_n \in \mathscr{L}(X)$ pour tout $n > 0$.

On a $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, donc il existe un entier m tel que $M_m \notin A$ (car A est un $\aleph_0$-antifiltre). Soit n assez grand, tel que $2/n < 1/m$.

Pour cet entier n on a $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} V(y_i^{(n)}, 1/n)$ donc $X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\left(V(y_i^{(n)}, 1/n)\right)$ et alors $M_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[f^{-1}\left(V(y_i^{(n)}, 1/n)\right) \cap M_m\right]$; or, chaque $f^{-1}\left(V(y_i^{(n)}, 1/n)\right) \in \mathscr{L}(X)$ et aussi $M_m \in \mathscr{L}(X)$, donc A étant un $\aleph_0$-antifiltre, de $M_m \notin A$ il résulte l'existence de $j \geqq 1$ tel que $M_m \cap f^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right) \notin A$.

Or, $M_m \cap f^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right) \cap g^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right) = \emptyset$ car si $d\left(f(x), y_j^{(n)}\right) < 1/n$, $d\left(g(x), y_j^{(n)}\right) < 1/n$ alors $d\left(f(x), g(x)\right) < 2/n < 1/m$, donc $x \notin M_m$. Ainsi, $M_m \cap f^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right) \subset f^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right) \ominus g^{-1}\left(V(y_j^{(n)}, 1/n)\right)$ et cette dernière différence symétrique n'est pas dans A, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. *Soit G l'ensemble des fonctions mésurables (au sens de Lebesgue) définies sur la droite réelle $X=R$ et à valeurs réelles, $Y=R$. Soit $\mathscr{L}(X)$ la σ-algèbre de Boole des ensembles mésurables de X, soit $\mathscr{L}(Y)$ la σ-algèbre de Boole de sous-ensembles de Y, engendrée par les intervalles semi-ouverts à droite. Soit A le $\aleph_0$-antifiltre des ensembles de $\mathscr{L}(X)$ ayant mesure nulle. Alors: 1. si $f, g\in G$ et $f=g(A)$ alors $f^{-1}(Q)=g^{-1}(Q)$ pour tout $Q\in\mathscr{L}(Y)$; 2. si $f, g\in G$ et $f\equiv g(A)$ alors il existe $Q\in\mathscr{L}(Y)$ tel que $f^{-1}(Q)\equiv g^{-1}(Q)$ (A).*

DÉMONSTRATION: La première affirmation se démontre comme au lemme 1; montrons donc la deuxième. En fait, on peut la considérer comme un cas particulier du théorème précedent, néanmoins nous fournirons une démonstration indépendante.

Soit $X_0=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}$; comme f, g sont des fonctions mésurables alors l'ensemble X_0 est mésurable, et on a $\mu(X_0)>0$, c'est-à-dire $X_0\notin A$, car $f\equiv g(A)$.

Soit $X_0^+=\{x\in X\mid f(x)>g(x)\}$, $X_0^-=\{x\in X\mid f(x)<g(x)\}$ donc $X_0=X_0^+\cup X_0^-$, $X_0^+\cap X_0^-=\emptyset$ avec $X_0^+, X_0^-\in\mathscr{L}(X)$. Alors de $X_0\notin A$ on a par exemple $X_0^+\notin A$ ou $X_0^-\notin A$, c'est-à-dire $\mu(X_0^+)>0$ ou $\mu(X_0^-)>0$. Supposons par exemple que $\mu(X_0^+)>0$.

Pour tout $n>0$, $M_n=\{x\in X\mid f(x)>g(x)+1/n\}$ est mésurable. Or, $X_0^+=\bigcup_{n>0}M_n$ et $\emptyset=M_0\subset M_1\subset M_2\subset M_3\subset\cdots\subset M_n\subset\cdots$, donc $X_0^+=\bigcup_{n>0}(M_n-M_{n-1})$ les ensembles M_n-M_{n-1} étant deux à deux disjoints et mésurables. Donc $\mu(X_0^+)=\sum_1^\infty\mu(M_n-M_{n-1})>0$ et alors il existe $n_0>0$ tel que $\mu(M_{n_0}-M_{n_0-1})>0$, donc $\mu(M_{n_0})\geqq\mu(M_{n_0}-M_{n_0-1})>0$.

D'autre part, soit $Q_k=[k/n_0, k+1/n_0)$, donc $X=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}f^{-1}(Q_k)$ et alors $M_{n_0}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}]$, où chaque ensemble $f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}$ est mésurable; ces ensembles $f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0}$ étant deux à deux disjoints, il existe k_0 tel que $\mu(f^{-1}(Q_{k_0})\cap M_{n_0})>0$, car $0<\mu(M_{n_0})=\sum_{-\infty}^{\infty}\mu(f^{-1}(Q_k)\cap M_{n_0})$.

Or, on a par construction $M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0})\cap g^{-1}(Q_{k_0})=\emptyset$. Ainsi, $M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0})\subset f^{-1}(Q_{k_0})\circ g^{-1}(Q_{k_0})\in\mathscr{L}(X)$, donc $\mu[f^{-1}(Q_{k_0})\circ g^{-1}(Q_{k_0})]\geqq\mu(M_{n_0}\cap f^{-1}(Q_{k_0}))>0$ et alors $f^{-1}(Q_{k_0})\circ g^{-1}(Q_{k_0})\notin A$.

3.

Soient X, Y des ensembles non vides, $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$ les algèbres de Boole de toutes les parties de X, Y resp. et soit θ un homomorphisme de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$; on peut supposer sans perte de généralité que $\theta(Y)=X$.

QUESTION: trouver des conditions pour qu'il existe une application f: $X\to Y$ telle que $\theta=f^{-1}$.

Nous montrerons que pour cela il faut et il suffit que $\theta(\bigcap_\alpha Q_\alpha)=\bigcap_\alpha\theta(Q_\alpha)$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$ de parties de Y.

Ce résultat sera une conséquence immédiate du théorème qui suit.

THÉORÈME 6. *Soient X, Y des ensembles non vides, soient $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ des sous-algèbres de Boole de $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$, telles que:*

1. $\emptyset, X \in \mathscr{V}(X)$, $\emptyset, Y \in \mathscr{V}(Y)$

2. *si U est un ultrafiltre de $\mathscr{V}(Y)$ alors l'intersection de tous les ensembles $Q_\alpha \in U$ est $\emptyset$ ou réduite à un point.*

Soit θ un homomorphisme de l'algèbre de Boole $\mathscr{V}(Y)$ dans $\mathscr{V}(X)$, tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$, $\theta(Y)=X$.

Pour qu'il existe une application $f: X \to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$ il faut et il suffit que: si $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ alors $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha)=\emptyset$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$, $Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y)$.

DÉMONSTRATION: Soit $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$, où f est une application de X dans Y. Alors si $Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y)$ et $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ on a $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(Q_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcap_\alpha Q_\alpha\right) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Réciproquement, soit donné θ, avec les propriétés indiquées. Soit $x \in X = \theta(Y)$ et considérons l'ensemble $U_x = \{Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y) \mid x \in \theta(Q_\alpha)\}$.

$U_x \neq \emptyset$ car $Y \in U_x$. U_x est un ultrafiltre de $\mathscr{V}(Y)$. En effet, si $Q_1, Q_2 \in U_x$ alors $Q_1 \cap Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$ et $x \in \theta(Q_1) \cap \theta(Q_2) = \theta(Q_1 \cap Q_2)$ donc $Q_1 \cap Q_2 \in U_x$; si $Q_1, Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$, $Q_1 \in U_x$, $Q_1 \subset Q_2$ alors $x \in \theta(Q_1) \subset \theta(Q_2)$ donc $Q_2 \in U_x$; si $Q_1, Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$ et $Q_1 \cup Q_2 \in U_x$ alors $x \in \theta(Q_1 \cup Q_2) = \theta(Q_1) \cup \theta(Q_2)$ donc $x \in \theta(Q_1)$ ou $x \in \theta(Q_2)$, c.a.d. $Q_1 \in U_x$ ou $Q_2 \in U_x$.

Alors nécessairement $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha$ est vide ou réduite à un point, disons $y \in Y$. Or, si c'était $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha = \emptyset$ alors $x \in \bigcap_{Q_\alpha \in U_x} \theta(Q_\alpha) = \emptyset$, absurde. Donc $\bigcap_{Q_\alpha \in U_x} Q_\alpha = \{y\}$, $y \in Y$.

Posons $f(x)=y$ et montrons que $f^{-1}(Q)=\theta(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$.

Si $x \in \theta(Q)$ alors $Q \in U_x$ donc $f(x)=y \in Q$ et $x \in f^{-1}(Q)$, ce qui montre $\theta(Q) \subset f^{-1}(Q)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(Q)$, avec $Q \in \mathscr{V}(Y)$ et si c'était $x \notin \theta(Q)$ alors on aurait $Q \notin U_x$. Or, si $Q_\alpha \in U_x$ on a $Q \cap Q_\alpha \neq \emptyset$, car $x \in \theta(Q_\alpha)$, donc $x \in f^{-1}(Q_\alpha)$ et alors $x \in f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q_\alpha) = f^{-1}(Q \cap Q_\alpha)$. Ainsi, $U_x \cup \{Q\}$ engendre un filtre de $\mathscr{V}(Y)$ strictement plus grand que U_x, distinct du filtre trivial de $\mathscr{V}(Y)$, absurde. Ainsi, $f^{-1}(Q) \subset \theta(Q)$ et alors $f^{-1}(Q)=\theta(Q)$.

COROLLAIRE. *Soient X, Y des ensembles non vides, soit θ un homomorphisme de $\mathscr{B}(Y)$ dans $\mathscr{B}(X)$ tel que $\theta(\emptyset)=\emptyset$, $\theta(Y)=X$. Pour qu'il existe une application $f: X \to Y$ telle que $\theta(Q)=f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \subset Y$ il faut et il suffit que: si $\bigcap_\alpha Q_\alpha = \emptyset$ alors $\bigcap_\alpha \theta(Q_\alpha)=\emptyset$ pour toute famille $(Q_\alpha)_\alpha$ de parties de Y.*

Il suffit de remarquer que l'intersection de tous les ensembles d'un ultrafiltre U de $\mathscr{B}(Y)$ est vide ou bien réduite à un point.

A propos des sous-algèbres de Boole $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ considérons la question suivante: si G désigne l'ensemble des applications de X dans un groupe abélien additif Y telles que $f^{-1}(Q) \in \mathscr{V}(X)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$, trouver des conditions pour que G soit un sous-groupe additif de Y^X.

THÉORÈME 7. *Soit: 1. Y un groupe abélien additif ordonné, ayant une partie dénombrable dense (selon l'ordre) Y_0, c'est-à-dire, si $y_1 < y_2$ dans Y alors il existe $y_0 \in Y_0$ tel que $y_1 < y_0 < y_2$.*

2. $\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$ *la sous-algèbre de Boole des parties de* Y *engendrée par les ensembles du type* $\{y\in Y\mid y<y_1\}$ *ou* $\{y\in Y\mid y>y_1\}$ *lorsque* $y_1\in Y$.

3. $\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ *une sous-algèbre de Boole de parties de* X, *telle que si* $(L_n)_n$ *est une suite dénombrable,* $L_n\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$, *alors* $\bigcup_n L_n\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$.

Soit G *l'ensemble de toutes les applications* $f\colon X\to Y$ *telles que* $f^{-1}(Q)\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ *pour tout* $Q\in\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$.

Alors G *est un sous-groupe additif de* Y^X.

Démonstration: Montrons que si $f, g\in G$ alors $f+g\in G$ et aussi $-f\in G$. Pour montrer que $h=f+g\in G$ il suffit de vérifier que si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ et $Q=\{y\in Y\mid y_1<y\}$ alors $h^{-1}(Q)\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ car tout élément de $\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$ est obtenu des ensembles du type ci-dessus avec un nombre fini de réunions, intersections et passages au complémentaire, et $\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathscr{B}(X)$.

Montrons par exemple que si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ alors $h^{-1}(Q)\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ (l'autre vérification étant analogue). On a $h^{-1}(Q)=\{x\in X\mid f(x)+g(x)<y_1\}=\{x\in X\mid f(x)<y_1-g(x)\}=\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}$ où $g_1(x)=y_1-g(x)$ pour tout $x\in X$.

De $g\in G$ vient $g_1\in G$ car si $Q=\{y\in Y\mid y<y_2\}$ alors $g_1^{-1}(Q)=\{x\in X\mid g_1(x)=y_1-g(x)<y_2\}=\{x\in X\mid g(x)>y_1-y_2\}\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ et si $Q'=\{y\in Y\mid y>y_2\}$ alors $g_1^{-1}(Q')=\{x\in X\mid g_1(x)=y_1-g(x)>y_2\}=\{x\in X\mid g(x)<y_1-y_2\}\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$; donc $g_1\in G$.

Montrons que $\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ lorsque $f, g_1\in G$.

Pour tout $y\in Y_0$ soit l'ensemble $E_y=\{x\in X\mid f(x)<y\}\cap\{x\in X\mid y<g_1(x)\}\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$. Alors, puisque Y_0 est dénombrable, on a $\bigcup_{y\in Y_0}E_y\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$. D'autre part $\bigcup_{y\in Y_0}E_y=\{x\in X\mid f(x)<g_1(x)\}$ car si $f(x)<g_1(x)$ il existe $y\in Y_0$ tel que $f(x)<y<g_1(x)$ donc $x\in E_y$.

Cela montre que $h=f+g\in G$.

Enfin, soit $f\in G$, alors $-f\in G$ car si $Q=\{y\in Y\mid y<y_1\}$ alors $(-f)^{-1}(Q)=\{x\in X\mid -f(x)<y_1\}=\{x\in X\mid f(x)>-y_1\}$, donc $(-f)^{-1}(Q)=f^{-1}(Q')\in\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ où $Q'=\{y\in Y\mid y>-y_1\}\in\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$ et ainsi $-f\in G$ (l'autre vérification étant analogue).

Si, en particulier, X, Y sont les groupes additifs des nombres réels et $\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ l'algèbre de Boole des ensembles Lebesgue-mésurables de X, on retrouve le fait que l'ensemble des fonctions Lebesgue mésurables forme un sous-groupe abélien additif de celui de toutes les fonctions.

Théorème 8. *Soient* X *un espace topologique et* Y *un espace topologique compact et totalement discontinu. Si* $\mathscr{V}^{\wedge}(X)$, $\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$ *désignent les réticulés des ensembles fermés de* X, Y *resp., soit* $\theta\colon\mathscr{V}^{\wedge}(Y)\to\mathscr{V}^{\wedge}(X)$ *un homomorphisme de réticulés satisfaisant:*

1. $\theta(Q)=\emptyset$ *si et seulement si* $Q=\emptyset$ *(avec* $Q\in\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$*)*

2. $\theta(Y)=X$

3. *si* $x\notin\theta(Q)$ *où* $Q\in\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$, *il existe* $Q'\in\mathscr{V}^{\wedge}(Y)$ *tel que* $x\in\theta(Q')$ *et* $\theta(Q)\cap\theta(Q')=\emptyset$.

Alors il existe une fonction continue $f\colon X \to Y$ *telle que* $\theta(Q) = f^{-1}(Q)$ *pour tout* $Q \in \mathscr{V}(Y)$.

DÉMONSTRATION: Soit $x \in X$ et considérons l'ensemble $R_x = \{Q_\alpha \in \mathscr{V}(Y) \mid x \in \theta(Q_\alpha)\}$. $R_x \neq \emptyset$, car $Y \in R_x$.

On a $\bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha \neq \emptyset$ autrement de la compacité de Y, il existerait une sous-famille finie $(Q_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} Q_{\alpha_i} = \emptyset$, donc $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \theta(Q_{\alpha_i}) = \theta\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_{\alpha_i}\right) = \theta(\emptyset) = \emptyset$, absurde.

Notons $Q_0 = \bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha \neq \emptyset$. Nous allons montrer que Q_0 est réduit à un point. S'il n'en était pas ainsi, comme Y est totalement discontinu, Q_0 ne serait pas connexe, donc il existerait deux ensembles fermés Q_1, $Q_2 \in \mathscr{V}(Y)$ tels que $Q_0 \subset Q_1 \cup Q_2$, avec $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $Q_1 \cap Q_0 \neq \emptyset$, $Q_2 \cap Q_0 \neq \emptyset$.

Notons $\theta(Q_1 \cup Q_2) = N \in \mathscr{V}(X)$; montrons que $x \in N$. Sinon, il existerait $Q' \in \mathscr{V}(Y)$ tel que $x \in \theta(Q')$ et $\theta(Q') \cap N = \emptyset$, donc $Q' \in R_x$ et alors $Q' \supset Q_0$; il résulte que $Q_0 \subset (Q_1 \cup Q_2) \cap Q'$ et $\theta(Q_0) \subset \theta(Q_1 \cup Q_2) \cap \theta(Q') = N \cap \theta(Q') = \emptyset$ donc $\theta(Q_0) = \emptyset$, absurde. Ainsi, on a bien $x \in N = \theta(Q_1) \cup \theta(Q_2)$ et par exemple $x \in \theta(Q_1)$ donc $Q_1 \in R_x$, $Q_0 \subset Q_1$ et enfin de $Q_0 \cap Q_2 \subset Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ il viendrait $Q_0 \cap Q_2 = \emptyset$, absurde.

Nous venons de montrer que $Q_0 = \bigcap_{Q_\alpha \in R_x} Q_\alpha$ est réduit à un point, $Q_0 = \{y\}$. Posons $f(x) = y$.

Montrons que $\varphi(Q) = f^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$; en particulier, cela entraîne que f est une fonction continue de X dans Y, car $\theta(Q) \in \mathscr{V}(X)$, réticulé des ensembles fermés de X.

Soit $x \in \theta(Q)$ donc $Q \in R_x$, $Q \supset \{y\} = \{f(x)\}$, c.a.d. $x \in f^{-1}(Q)$.

Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(Q)$; si on avait $x \notin \theta(Q)$, il existerait $Q' \in \mathscr{V}(Y)$ tel que $x \in \theta(Q')$, $\theta(Q') \cap \theta(Q) = \emptyset$, donc $\theta(Q' \cap Q) = \emptyset$ et ainsi $Q' \cap Q = \emptyset$; or, d'autre part, de $x \in \theta(Q')$ vient $x \in f^{-1}(Q')$ et ainsi $x \in f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q') = f^{-1}(Q \cap Q') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, absurde. Ainsi, on a bien $f^{-1}(Q) = \theta(Q)$ pour tout $Q \in \mathscr{V}(Y)$.

Remarquons que si X est un espace topologique, si Y est un espace topologique compact, si $\mathscr{V}(X)$, $\mathscr{V}(Y)$ désignent les réticulés des ensembles fermés de X, Y, resp., si $f\colon X \to Y$ est une fonction continue telle que $f(X) = Y$, alors l'application $f^{-1}\colon \mathscr{V}(Y) \to \mathscr{V}(X)$ satisfait les propriétés (1), (2), (3) du théorème précedent.

En effet, (1), (2) sont triviales. Quant à (3), si $x \notin f^{-1}(Q)$, $Q \in \mathscr{V}(Y)$, alors $f(x) \notin Q$; puisque Y est un espace compact, il est régulier, donc il existe un voisinage fermé Q' de $f(x)$, $Q' \cap Q = \emptyset$; par conséquent, $x \in f^{-1}(Q')$ et $f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q') = f^{-1}(Q \cap Q') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

University of Illinois, Urbana, Ill. (U.S.A.)

(Eingegangen am 6. April 1961)

Behrens, E.-A.
Math. Zeitschr. 77, 207–218 (1961)

Einreihige Ringe

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Ernst-August Behrens

Einen Artin-Ring R, d.h. einen der Minimalbedingung für Linksideale genügenden Ring mit einem Einselement 1, bezeichnet man als einreihig, wenn er ringdirekte Summe primärer Ringe R_i ist, in denen jedes unzerlegbare Linksideal und jedes unzerlegbare Rechtsideal als R-Links- bzw. als R-Rechts-Modul nur eine einzige Kompositionsreihe besitzt. Wenn dabei die direkten Summanden R_i insbesondere vollständig primär, also die Faktorringe $R_i/\mathfrak{W}_i$ nach ihren Radikalen $\mathfrak{W}_i$ Körper sind, enthalten die R_i außer R_i selbst keine weiteren unzerlegbaren Links- oder Rechtsideale, die obige Forderung bedeutet dann, daß jedes R_i als einzige Kompositionsreihen sowohl von Links- als auch von Rechtsidealen die Loewy-Reihe der Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ besitzt, wobei $k=0, 1, \ldots, e_i$ und e_i der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}_i$ ist.

Bei vollständig primären R_i bietet jeder solche Ring ein Beispiel eines der vom Verfasser bereits früher diskutierten distributiv darstellbaren Ringe, d.h. eines Artin-Ringes R, der einen treuen R-Linksmodul $\mathfrak{m}$ mit distributivem R-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ besitzt: Für $\mathfrak{m}$ braucht man nämlich nur den obigen einreihigen Ring R als R-Linksmodul zu nehmen, da dessen R-Linksuntermoduln gerade seine Linksideale sind.

Die Eigenschaft von R, sich selbst als R-Linksmodul mit distributivem R-Untermodulverband darzustellen, charakterisiert nach Behrens [4] unter allen distributiv darstellbaren Ringen die ringdirekten Summen vollständig primärer Ringe R_i mit den $\mathfrak{W}_i^k$ als einzigen Linksidealen R_i und zeichnet insbesondere unter den halbeinfachen Ringen die direkten Summen von Körpern aus. Letztere sind unter den halbeinfachen Ringen auch dadurch bestimmt, daß der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ jedes treuen R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ von kürzest möglicher Länge zu R ringisomorph ist, oder auch dadurch, daß jedes Linksideal (zweiseitiges) Ideal ist. §1, Satz 2, besagt, daß diese drei Eigenschaften für distributiv darstellbare Ringe ebenfalls miteinander äquivalent sind.

R sei nun ein solcher Ring R_i, d.h. ein vollständig primärer Ring mit distributivem Linksidealverband. R sei außerdem cleft, d.h. als additive Gruppe sei R die direkte Summe $R=K+\mathfrak{W}$. Dann existiert ein Element ω in $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ derart, daß sich jedes Element ϱ aus R in der Form

$$\varrho=\varkappa_0\omega^0+\varkappa_1\omega^1+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{1}$$

mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_i$ aus dem Körper K schreiben läßt (§2, (1), oder auch Behrens [5]). Dies bedeutet noch nicht, daß R ein einreihiger Ring ist, denn wie ein bereits von Baer in [3] diskutiertes und in

§2 nochmals vorgetragenes Beispiel zeigt, braucht ein vollständig primärer Ring $R=K+\mathfrak{W}$, dessen Linksidealverband aus den Potenzen $\mathfrak{W}^k$ seines Radikales $\mathfrak{W}$ besteht, nicht einreihig zu sein. Erst wenn man noch die Voraussetzung hinzunimmt, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Epimorphismus ist, läßt sich die Einreihigkeit beweisen (§2, Satz 1). — Auch ist die Struktur von R durch (1) noch nicht auf die Struktur von K zurückgeführt, da man dazu noch wissen muß, wie die Koeffizienten $\varkappa_i$ in (1) von dem Körperelement $\varkappa$ in $\varrho=\omega\varkappa$ abhängen. Diese Frage hängt mit den inneren Automorphismen und den inneren Ableitungen von K zusammen. Wenn nämlich K nur innere Automorphismen und nur innere Ableitungen besitzt oder wenn, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, dies über Φ gilt, läßt sich das in (1) benutzte Element ω in $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ so wählen, daß $\omega\varkappa=\varkappa\omega$ für alle $\varkappa\in K$ gilt. Wenn jedoch K einen äußeren Automorphismus oder eine äußere Ableitung besitzt, so gibt es unter den obigen Ringen bereits für $e=2$ bzw. $e=3$ solche, in denen kein derartiges ω existiert (§2, Sätze 2 und 3).

In den in §2 untersuchten Ringen ist jedes Linksideal ein (zweiseitiges) Ideal. Damit erhebt sich das Problem, ob für die obigen Resultate wohl schon die Voraussetzungen, daß R vollständig primär und der Verband seiner (zweiseitigen) Ideale distributiv ist, genügen. Dieser Frage sind die Überlegungen des Paragraphen 3 gewidmet. Die Multiplikationen eines Ringes $\mathfrak{o}$ mit Einselement von links und rechts mit festen Elementen aus $\mathfrak{o}$ erzeugen den Multiplikationsring R von $\mathfrak{o}$. Dabei ist $\mathfrak{o}$ natürlich treuer R-Linksmodul seines Multiplikationsringes R und die (zweiseitigen) Ideale in $\mathfrak{o}$ sind die bezüglich des Multiplikationsringes R zulässigen Untermoduln von $\mathfrak{o}$. Der Verband der Ideale in $\mathfrak{o}$ ist offenbar genau dann distributiv, wenn $\mathfrak{o}$ seinen Multiplikationsring R distributiv darstellt. Um hierbei die bisher entwickelte Theorie der distributiv darstellbaren Ringe anwenden zu können, muß man zuvor feststellen, ob der Multiplikationsring eines primären Ringes wieder primär ist. Wenn das auch durch die seit langem bekannte Tatsache nahegelegt wird, daß der Multiplikationsring einer Algebra $\mathfrak{o}$ genau dann einfach ist, wenn $\mathfrak{o}$ es ist, ist dies — selbst bei endlichem Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ — dann falsch, wenn $\mathfrak{z}$ zu klein ist, wie das Gegenbeispiel in §3 beweist. Daß mit $\mathfrak{o}$ auch R primär ist, ließ sich erst unter den Voraussetzungen beweisen, daß nicht nur der Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ endlich ist, sondern auch die von den Elementen z aus $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ induzierten Zentrumselemente von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ bereits das ganze Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ausfüllen, wobei $\mathfrak{w}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$ ist (§3, Satz 2). Der Beweis ist nicht trivial, sondern man bedarf dazu eines Satzes, der auch im Aufbau der Galois-Theorie der einfachen Ringe eine Rolle spielt, s. z.B. KASCH [8]. Auf Grund dieser Erkenntnis kann man mit Hilfe bekannter Sätze über distributiv darstellbare Ringe sehr schnell schließen, daß unter den oben genannten Voraussetzungen der Verband $\mathfrak{V}$ der (zweiseitigen) Ideale in dem primären Ring $\mathfrak{o}$ dann und nur dann distributiv ist, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der $\mathfrak{w}^k$ besteht (§3, Satz 3). Wenn dabei insbesondere $\mathfrak{o}$ der vollständig primäre Ring $K+\mathfrak{w}$ ist, ist jedes Linksideal in $\mathfrak{o}$ zweiseitig und $\mathfrak{o}$ ein einreihiger Ring (§3, Satz 4).

§ 1

Unter den halbeinfachen Artin-Ringen sind die direkten Summen von Körpern durch jede der folgenden Eigenschaften charakterisierbar:

1. R ist treuer R-Linksmodul von kleinster (verbandstheoretischer) Länge, d.h. kein kürzerer Modul ist treu.

2. Der Zentralisator eines jeden treuen R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ von kleinster Länge ist zu R ringisomorph.

3. Jedes Linksideal von R ist (zweiseitiges) Ideal.

Die halbeinfachen Ringe sind Beispiele für distributiv darstellbare Artin-Ringe, d.h. für Ringe R mit Einselement, die einen treuen R-Modul $\mathfrak{m}$ mit distributivem R-Untermodulverband $V(\mathfrak{m})$ besitzen. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß auch für beliebige distributiv darstellbare Ringe die obigen drei Eigenschaften miteinander äquivalent sind und daß sie unter den distributiv darstellbaren Ringen die ringdirekten Summen vollständig primärer Ringe mit distributivem Linksidealverband charakterisieren.

$\mathfrak{m}$ sei ein treuer R-Modul mit distributivem R-Untermodulverband V. Nach Behrens [5], Satz 2, ist $\mathfrak{m}$ zyklisch, $\mathfrak{m}=Rb$, und damit $\mathfrak{m}$ als R-Linksmodul isomorph zu dem Faktormodul $R-\mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ das Linksideal $(0:b)=\{\tau\,|\,\tau\in R,\ \tau b=0\}$ ist. Der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{m}$ besteht aus allen denjenigen Endomorphismen Γ der additiven abelschen Gruppe $\mathfrak{m}$, die mit den Operatoren aus R vertauschbar sind, d.h. $(\varrho m)\Gamma=\varrho(m\Gamma)$ für alle $\varrho\in R$, $m\in\mathfrak{m}$, $\Gamma\in\mathfrak{Z}$. Auf Grund der Operator-Isomorphie der R-Moduln $\mathfrak{m}$ und $R-\mathfrak{l}$ läßt sich die algebraische Struktur von $\mathfrak{Z}$ durch die Bilder $\gamma \bmod \mathfrak{l}$ des Elementes $1 \bmod \mathfrak{l}$ unter den Endomorphismen Γ aus $\mathfrak{Z}$ erfassen. Genau diejenigen Elemente $\gamma\in R$ definieren in dieser Weise Endomorphismen Γ aus dem Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $R-\mathfrak{l}$, für die $\mathfrak{l}\gamma\subseteq\mathfrak{l}$ gilt, und zwei solche Elemente γ_1 und γ_2 induzieren dann und nur dann dasselbe Element aus $\mathfrak{Z}$, wenn $\gamma_1\equiv\gamma_2 \pmod{\mathfrak{l}}$ gilt. Mit anderen Worten

Satz 1. *R werde durch den R-Modul $\mathfrak{m}$ distributiv dargestellt. Für das Linksideal $\mathfrak{l}$ seien $\mathfrak{m}$ und $R-\mathfrak{l}$ zueinander als R-Moduln isomorph. Dann ist der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{m}$ ringisomorph zu*

$$\{\gamma \bmod \mathfrak{l}\,|\,\gamma\in R,\ \mathfrak{l}\gamma\subseteq\mathfrak{l}\}. \tag{1}$$

R sei nun ein distributiv darstellbarer Ring. Nach Behrens [5], Satz 1, stellen genau diejenigen R-Moduln $\mathfrak{m}$ den Ring R distributiv dar, deren verbandstheoretische Länge unter allen treuen R-Moduln kleinstmöglich ist. Hieraus folgt für distributiv darstellbare Ringe die Äquivalenz der beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Eigenschaften 1. und 2.: Wenn nämlich $\mathfrak{m}\cong R-\mathfrak{l}$ irgendein distributiver R-Modul ist, dann ist nach Satz 1, (1), der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ dann und nur dann zu R ringisomorph, wenn $\mathfrak{l}=0$, also $\mathfrak{m}$ zu $R-0=R$ als R-Linksmodul isomorph und damit R ein treuer R-Modul kleinster Länge ist. — Wenn die obige Eigenschaft 3. erfüllt, d.h. jedes Linksideal von R zweiseitig ist, so gilt dies insbesondere für das Linksideal $\mathfrak{l}$ in einem den Ring R distributiv darstellenden Modul $R-\mathfrak{l}$. Da $R-\mathfrak{l}$

nach Definition eines R distributiv darstellenden Moduls treu ist, würde aus $\mathfrak{l} \neq 0$ folgen $\mathfrak{l}(R-\mathfrak{l}) \neq 0$, was $\mathfrak{l}R \subseteqq \mathfrak{l}$ widerspräche. Also ist $\mathfrak{l}=0$ und damit R selbst ein distributiver R-Modul. Daß schließlich auch umgekehrt aus 1. die Eigenschaft 3. folgt, wurde bereits in BEHRENS [4], im Korollar 1 zu Satz 7, bewiesen und folgt außerdem auch daraus, daß nach BEHRENS [6], Satz 1, jeder R-Untermodul eines distributiven R-Linksmoduls $\mathfrak{m}$ vollinvariant ist und die Multiplikationen des R-Linksmoduls R mit Elementen aus R von rechts R-Endomorphismen in R induzieren. — Genauer wurde in BEHRENS [4] gezeigt, daß, wenn der Verband der Linksideale von R distributiv ist, R eine ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i ist, deren einseitige Linksideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ der Radikale $\mathfrak{W}_i$ der Ringe R_i sind.

Dies sei zusammengefaßt zu dem

SATZ 2. *Voraussetzung: R sei ein distributiv darstellbarer Ring.*

Behauptungen: I. *Folgende Eigenschaften von R sind miteinander äquivalent:*

1. *R ist ein R-Linksmodul kleinstmöglicher Länge unter allen treuen R-Linksmoduln, d.h. kein R-Modul kürzerer Länge ist treu.*

2. *Der Zentralisator $\mathfrak{Z}$ eines jeden treuen R-Linksmoduls von kleinstmöglicher Länge ist ringisomorph zu R.*

3. *Jedes Linksideal von R ist (zweiseitiges) Ideal.*

4. *R ist distributiver R-Linksmodul.*

II. *Wenn eine dieser vier Eigenschaften für R erfüllt ist, dann ist R ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i, deren einzige Ideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ ihrer Radikale $\mathfrak{W}_i$ sind.*

Wenn umgekehrt ein Artin-Ring R mit Einselement ringdirekte Summe vollständig primärer Ringe R_i ist, deren einzige Linksideale die Potenzen $\mathfrak{W}_i^k$ sind, wird jedes R_i durch sich selbst als R_i-Linksmodul und damit R durch sich selbst als R-Linksmodul distributiv dargestellt, denn die Linksidealverbände der R_i sind Ketten und R ist treuer R-Linksmodul.

§ 2

Ein Ring R heißt einreihig, wenn er ringdirekte Summe primärer Ringe R_i ist, in denen jedes unzerlegbare Linksideal und jedes unzerlegbare Rechtsideal nur eine Kompositionsreihe besitzt, s. z.B. KÖTHE [9] oder WALL [10]. Wenn der distributiv darstellbare Ring R eine der in § 1, Satz 2, genannten Eigenschaften hat, sind seine direkten Summanden R_i die einzigen unzerlegbaren Links- bzw. Rechtsideale in R, denn ein vollständig primärer Ring enthält nur sich selbst als unzerlegbares Links- oder Rechtsideal. Die Potenzen des Radikales $\mathfrak{W}_i$ bilden dabei die einzige Kompositionsreihe von Linksidealen in R_i. Die R_i und damit auch R sind jedoch erst dann einreihig, wenn die $\mathfrak{W}_i^k$ auch eine Kompositionsreihe von Rechtsidealen in R_i bilden. Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß dies im Gegensatz zu BEHRENS [4], Korollar 2 zu Satz 7 nicht ganz trivial ist, sondern daß dazu die letzte der im folgenden Satz 1 genannten Voraussetzungen unerläßlich ist.

Der vollständig primäre Artin-Ring R sei cleft, d.h. die additive Gruppe von Rlasse sich als direkte Summe $R=K+\mathfrak{W}$ darstellen und die $\mathfrak{W}^k$ seien die einzigen Linksideale in R. ω sei ein in $\mathfrak{W}$ aber nicht in $\mathfrak{W}^2$ liegendes Ringelement. Dann ist $\mathfrak{W}=R\omega$, da $R\omega$ als Linksideal eines der Ideale $\mathfrak{W}^j$ sein muß. Aus der Induktionsannahme $\mathfrak{W}^k=R\omega^k$ folgt $\mathfrak{W}^{k+1}=\mathfrak{W}\omega^k=R\omega^{k+1}$. Der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ sei e, d.h. $\mathfrak{W}^{e-1}\neq 0$, $\mathfrak{W}^e=0$. Da $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{W}^{k+1}$ ein irreduzibler R-Linksmodul, also ein K-Linksmodul ist, lassen sich für $k=0, 1, \ldots, e-1$ alle Elemente ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ in der Form

$$\varrho=\varkappa_k\omega^k+\varkappa_{k+1}\omega^{k+1}+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{1}$$

mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_k$ aus K schreiben. Für $\lambda_k, \ldots, \lambda_{e-1}\in K$ liegt das Element

$$\varrho=\omega^k\lambda_k+\cdots+\omega^{e-1}\lambda_{e-1} \tag{2}$$

in $\mathfrak{W}^k$, läßt sich also wegen (1) in der Form

$$\varrho=\lambda_k^*\omega^k+\varkappa_{k+1}\omega^{k+1}+\cdots+\varkappa_{e-1}\omega^{e-1} \tag{3}$$

darstellen. Die Abbildung $\lambda_k\to\lambda_k^*$ ist dabei ein Isomorphismus des Körpers K in sich, da für alle $\lambda, \mu\in K$ die Kongruenzen

$$\omega^k\cdot\lambda\mu=\omega^k\lambda\cdot\mu\equiv\lambda^*\omega^k\mu\equiv\lambda^*\mu^*\omega^k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}}$$

richtig sind und $\varkappa\omega^k\in\mathfrak{W}^{k+1}$ impliziert $\varkappa=0$, da K ein Körper ist. Unter der Voraussetzung, daß K nur Automorphismen, aber keine Isomorphismen auf einen echten Teilkörper besitzt, erfüllen die Bilder λ_k^* bei der obigen Abbildung ganz K. Hieraus folgt, daß sich für $k=0, 1, \ldots, e-1$ jedes Element ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ auch in der Form (2) mit eindeutig bestimmten $\lambda_k\in K$ schreiben läßt, und weiter, daß die Faktorgruppen $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{W}^{k+1}$ als R-Rechtsmoduln ebenfalls irreduzibel sind, daß also R einreihig ist.

Satz 1. *Voraussetzungen: Der vollständig primäre Artin-Ring R sei cleft, d.h. $R=K+\mathfrak{W}$. R sei distributiv darstellbar und besitze eine der vier in* §1, *Satz* 2, *genannten, einander äquivalenten Eigenschaften* 1. *bis* 4. *Jeder Isomorphismus von K in sich sei ein Automorphismus.*

Behauptungen: 1. *R ist einreihig mit den Potenzen $\mathfrak{W}^k$ als einzigen einseitigen Idealen.* 2. *$\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ enthält ein Element ω, mit dessen Hilfe sich jedes Element ϱ aus $\mathfrak{W}^k$ in der Form* (1) *oder* (2) *mit eindeutig bestimmten $\varkappa_j$ bzw. λ_j aus K schreiben läßt.*

Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf ringdirekte Summen primärer Ringe ist trivial. Natürlich ist auch umgekehrt jeder einreihige Ring $R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_q$ mit vollständig primären Summanden R_i ein durch sich selbst als R-Linksmodul distributiv dargestellter Ring, in dem jedes einseitige Ideal zweiseitig ist.

Daß man hierbei die Voraussetzung, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Automorphismus ist, nicht weglassen kann, zeigt folgendes von R. Baer in [3] eingeführtes Beispiel (nach Vertauschung von links mit rechts):

Sei * ein Isomorphismus des kommutativen Körpers K in einen echten Unterkörper K^* von K. Sei $R=\{(f, g)\,|\,f, g\in K\}$ mit komponentenweiser Addition und $(f', g')\cdot(f, g)=(f'f, f'g+g'f^*)$ als Multiplikation. Außer (0) und R enthält R als einziges Linksideal das zweiseitige Ideal $\mathfrak{W}=\{(0, b)\,|\,b\in K\}$. Dagegen ist $\mathfrak{r}=\{(0, b^*)\,|\,b\in K\}$ ein von diesen drei Idealen verschiedenes Rechtsideal. R ist vollständig primär, sein Radikal $\mathfrak{W}$ hat den Exponenten zwei und es gilt $R=K+\mathfrak{W}$.

Wenn $\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ sogar ein Element ω enthält, das mit allen Elementen $\varkappa$ aus K vertauschbar ist, dann ist die Struktur des Ringes R durch die Darstellungen (1) oder (2) seiner Elemente ϱ völlig aufgeklärt. Für die Existenz eines solchen ω ist zumindest notwendig, daß für $k=2$ der zu ω in obigem Sinne gehörende Isomorphismus $\lambda\to\lambda^*$ von K in sich die identische Abbildung von K auf sich ist. Wenn nun K als Isomorphismen in sich nur innere Automorphismen besitzt oder, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, wenn zu K als Isomorphismen über Φ in K nur innere Automorphismen über Φ existieren, läßt sich ω so wählen, daß die Abbildung * die identische Abbildung ist. Für ein beliebiges $\omega_0\in\mathfrak{W}\setminus\mathfrak{W}^2$ folgt nämlich zunächst aus $\omega_0\lambda\equiv\lambda^*\omega_0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^2)$, $\lambda\in K$ und $\lambda^*=\varkappa_0^{-1}\lambda\varkappa_0$, $\varkappa_0\in K$, für $\omega=\varkappa_0\omega_0$ die Kongruenz

$$\omega\lambda=\varkappa_0\omega_0\lambda\equiv\varkappa_0\lambda^*\omega_0=\varkappa_0\lambda^*\varkappa_0^{-1}\omega=\lambda\omega\quad(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^2),$$

also

$$\omega^k\lambda\equiv\lambda\omega^k\quad(\mathrm{mod}\,\mathfrak{W}^{k+1}).$$

Wenn $\mathfrak{W}^2=0$, ist damit, wegen $\omega\mathfrak{W}=0$, die erste Behauptung des folgenden Satzes bewiesen und daher die Struktur von R in diesem Fall auf die des Körpers K zurückgeführt.

SATZ 2. *Voraussetzungen: Der Linksidealverband des Artin-Ringes $R=K+\mathfrak{W}$ sei distributiv. Der Exponent e des Radikales $\mathfrak{W}$ sei 2.*

Behauptungen: 1. *Wenn jeder Isomorphismus des Körpers K in sich ein innerer Automorphismus von K ist oder, wenn, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, jeder Isomorphismus von K über Φ in sich ein innerer Automorphismus von K über Φ ist, enthält $\mathfrak{W}$ ein solches mit allen Elementen aus K vertauschbares Element ω, daß jedes Element $\varrho\in R$ sich mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ aus K in der Form $\varrho=\varkappa_0+\varkappa_1\omega$ schreiben läßt.*

2. *Wenn K ein Körper mit einem äußeren Automorphismus * ist, existiert ein Ring $R=K+\mathfrak{W}$, $e=2$, mit distributivem Linksidealverband, in welchem sich kein Element ω in $\mathfrak{W}$ mit den in der ersten Behauptung genannten Eigenschaften finden läßt.*

Zum Beweis der 2. Behauptung sei $R=\{(\varkappa_0, \varkappa_1)\,|\,\varkappa_i\in K\}$ mit komponentenweiser Addition und mit der Multiplikation

$$(\varkappa_0, \varkappa_1)\cdot(\lambda_0, \lambda_1)=(\varkappa_0\lambda_0, \varkappa_0\lambda_1+\varkappa_1\lambda_0^*),$$

d.h. $\omega_0\varkappa=\varkappa^*\omega_0$, wenn man $\varkappa=(\varkappa, 1)$, $\omega_0=(0, 1)$ setzt. Dann sind (0), $\mathfrak{W}=K\omega_0$, und R die einzigen einseitigen Ideale in $R=K+\mathfrak{W}$. Würde in $\mathfrak{W}$

ein $\omega \neq 0$ mit $\omega\lambda = \lambda\omega$ für alle $\lambda \in K$ existieren, dann wäre $\omega = \varkappa_0\omega_0$ für ein geeignetes $\varkappa_0 \in K$, also wäre für alle $\lambda \in K$ das Produkt $\omega\lambda = \varkappa_0\omega_0\lambda = \varkappa_0\lambda^*\omega_0 = \varkappa_0\lambda^*\varkappa_0^{-1}\omega$, also $\lambda^* = \varkappa_0^{-1}\lambda\varkappa_0$, und daher * doch ein innerer Automorphismus von K.

Falls der Exponent e des Radikales größer als 2 ist, folgt die Existenz eines mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbaren Elementes $\omega \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$, wenn man überdies noch voraussetzt, daß K auch ausschließlich innere Ableitungen (bzw. innere Ableitungen über Φ) besitzt, d.h. daß für jeden Endomorphismus $\lambda \to \lambda'$ von K bzw. für jede Φ-lineare Abbildung von K in sich mit $(\lambda_1\lambda_2)' = \lambda_1'\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2'$ ein Element γ in K existiert mit $\lambda' = \lambda\gamma - \gamma\lambda$. Zum Beweis sei zur vollständigen Induktion nach k für $k \geqq 2$ angenommen, daß ein Element $\omega_k \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ existiert, für welches

$$\omega_k\varkappa \equiv \varkappa\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^k} \tag{4}$$

für alle $\varkappa \in K$ richtig ist. Hierbei ergibt sich die Existenz von ω_2, also die Verankerung der vollständigen Induktion, aus der ersten Behauptung von Satz 1. Für dieses ω_k existiert für jedes $\varkappa$ genau ein Element $\varkappa'$ in K für welches

$$\omega_k\varkappa \equiv (\varkappa + \varkappa'\omega_k^{k-1})\,\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{5}$$

gilt, denn nach (1) ist jedes Element aus $\mathfrak{W}^k$ modulo $\mathfrak{W}^{k+1}$ genau einem Element $\mu\omega_k^k$ kongruent, $\mu \in K$. Sei auch $\lambda \in K$. Für das Produkt $\varkappa\lambda$ folgt einerseits aus (5) die Kongruenz

$$\omega_k \cdot \varkappa\lambda \equiv (\varkappa\lambda + (\varkappa\lambda)'\omega_k^{k-1})\,\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{6}$$

und andererseits, ebenfalls modulo $\mathfrak{W}^{k+1}$ die Kongruenzen

$$\begin{aligned}\omega_k\varkappa \cdot \lambda &\equiv (\varkappa + \varkappa'\omega_k^{k-1})\,\omega_k \cdot \lambda \equiv \varkappa \cdot \omega_k\lambda + \varkappa' \cdot \omega_k^k\lambda \\ &\equiv \varkappa(\lambda + \lambda'\omega_k^{k-1})\,\omega_k + \varkappa'\lambda\omega_k^k,\end{aligned}$$

also

$$\omega_k \cdot \varkappa\lambda \equiv \varkappa\lambda\omega_k + (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\,\omega_k^k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}}. \tag{7}$$

Der Vergleich von (6) und (7) zeigt, daß der Endomorphismus $\varkappa \to \varkappa'$ von K in sich eine Ableitung ist. Wenn nun K nur innere Ableitungen besitzt, existiert zu diesem Endomorphismus ein $\gamma \in K$ mit $\varkappa' = \varkappa\gamma - \gamma\varkappa$. Somit läßt sich (5) in der Form

$$\omega_k\varkappa \equiv (\varkappa + (\varkappa\gamma - \gamma\varkappa)\,\omega_k^{k-1})\,\omega_k \pmod{\mathfrak{W}^{k+1}} \tag{8}$$

schreiben. Setzt man $\omega_{k+1} = \omega_k + \gamma\omega_k^k$, so folgt aus (8) die Kongruenz (4) für $k+1$ statt k. Wegen $\mathfrak{W}^e = 0$ ergibt sich in $\omega = \omega_e$ ein mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbares Element aus $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$. Damit ist die erste Behauptung der folgenden Verallgemeinerung des Satzes 2 auf beliebige Exponenten e des Radikales $\mathfrak{W}$ bewiesen.

Satz 3. *Voraussetzungen: Der Linksidealverband des Artin-Ringes* $R = K + \mathfrak{W}$ *sei distributiv und* e *der Exponent des Radikales* $\mathfrak{W}$.

Behauptungen: 1. *Wenn jeder Isomorphismus des Körpers K in sich ein innerer Automorphismus und jede Ableitung von K eine innere Ableitung ist, oder, falls R eine Algebra über dem kommutativen Körper Φ ist, wenn dies für die Isomorphismen und die Ableitungen über Φ gilt, dann enthält $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ ein mit allen Elementen $\varkappa$ aus K vertauschbares Element ω, und jedes Element ϱ von R läßt sich mit eindeutig bestimmten Elementen $\varkappa_i \in K$ in der Form*

$$\varrho = \varkappa_0 + \varkappa_1 \omega + \cdots + \varkappa_{e-1} \omega^{e-1}$$

schreiben.

2. *Wenn K ein Körper mit einer äußeren Ableitung ist, existiert ein Ring $R = K + \mathfrak{W}$, $e = 3$, mit distributivem Linksidealverband, in dem sich kein Element ω in $\mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ mit $\omega\varkappa = \varkappa\omega$ für alle $\varkappa \in K$ finden läßt.*

Analog dem bei Satz 2 verwendeten Beispiel sei jetzt zum Beweis der zweiten Behauptung R der Ring der Elemente $(\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2)$, $\varkappa_i \in K$, mit der Multiplikation $\omega_0\varkappa = \varkappa\omega_0 + \varkappa'\omega_0^2$, wobei $1 = (1, 0, 0)$, $\omega_0 = (0, 1, 0)$, $\omega_0^2 = (0, 0, 1)$, $\omega_0^3 = (0, 0, 0)$ und $\varkappa \to \varkappa'$ die äußere Ableitung von K ist. Die Gleichung $(\varkappa\lambda)' = \varkappa'\lambda + \varkappa\lambda'$ garantiert, daß diese Multiplikation assoziativ ist. Ein mit allen $\varkappa \in K$ vertauschbares Element $\omega \in \mathfrak{W} \setminus \mathfrak{W}^2$ müßte sich in der Form $\omega = \alpha\omega_0 + \beta\omega_0^2$ mit $\alpha, \beta \in K$ schreiben lassen. Aus $\omega\varkappa = \varkappa\omega$ für alle $\varkappa \in K$ würde dann folgen, daß α im Zentrum von K liegt und $\varkappa' = \varkappa\gamma - \gamma\varkappa$ mit $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ gilt.

Bekanntlich (s. z.B. JACOBSON [7]) besitzt ein Körper K über seinem Zentrum Z nur innere Automorphismen und nur innere Ableitungen. Die Voraussetzungen in der 1. Behauptung von Satz 3 sind daher erfüllt, wenn das Zentrum Φ von $R = K + \mathfrak{W}$ so groß ist, daß es Z enthält.

§ 3

$\mathfrak{o}$ sei ein Artin-Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{z}$ sein Zentrum. R sei der von den Linksmultiplikationen L_a und den Rechtsmultiplikationen R_a von $\mathfrak{o}$ mit Elementen a aus $\mathfrak{o}$ erzeugte Multiplikationsring. Er besteht aus Elementen τ der Gestalt

$$\tau = L_{a_1} R_{b_1} + \cdots + L_{a_n} R_{b_n} \tag{1}$$

und enthält die zu $\mathfrak{o}$ und dem zu $\mathfrak{o}$ inversen Ring $\mathfrak{o}^*$ isomorphen Unterringe $L_\mathfrak{o} = \{L_a \mid a \in \mathfrak{o}\}$ bzw. $R_\mathfrak{o} = \{R_a \mid a \in \mathfrak{o}\}$. Nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], S. 63, ist R das Bild des Kronecker-Produktes $\mathfrak{o} \otimes \mathfrak{o}^*$ über dem Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ unter dem Epimorphismus

$$L_a \otimes R_b \to L_a R_b. \tag{2}$$

Für einen einfachen Ring $\mathfrak{o}$ ist, nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], Theorem 7.1.E, R dann und nur dann ein Artin-Ring, wenn der Rang von $\mathfrak{o}$ über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ endlich ist. Andererseits folgt für einen beliebigen Artin-Ring — nach Theorem 6.10.B dieses Buches [2] — aus der Endlichkeit des Ranges von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ die Minimalbedingung für Linksideale in R. Um die bisher entwickelte Theorie der distributiv darstellbaren Ringe auf den R-Links-

modul $\mathfrak{o}$ anwenden zu können, sei daher im folgenden der Rang von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ als endlich vorausgesetzt. $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}$ seien die Radikale von $\mathfrak{o}$ bzw. R.

Satz 1. *Mit R ist auch $\mathfrak{o}$ primär, und es gilt $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$.*

Beweis. 1. Mit dem Ideal $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{o}$ ist wegen $L_xR_y=R_yL_x$ auch das von

$$L_{\mathfrak{w}}=\{L_w \mid w\in\mathfrak{w}\} \tag{3}$$

erzeugte Rechtsideal in R nilpotent, also in $\mathfrak{W}$ enthalten. Hieraus folgt $\mathfrak{w}=\mathfrak{w}\mathfrak{o}=L_{\mathfrak{w}}\mathfrak{o}\subseteqq\mathfrak{W}\mathfrak{o}$. Wäre dabei $\mathfrak{w}\subset\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, so wäre der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}=\bar{\mathfrak{o}}$ eine ringdirekte Summe $\overline{\mathfrak{W}\mathfrak{o}}\oplus\bar{\mathfrak{b}}$, denn wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{W}$ ist $\mathfrak{W}\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$ unmöglich. Also gäbe es ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{W}\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{o}\cap\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{w}$. Hieraus würde $\mathfrak{W}^2\mathfrak{o}\cup\mathfrak{W}\mathfrak{b}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}=\mathfrak{W}^2\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=\cdots=\mathfrak{W}^e\mathfrak{o}\cup\mathfrak{b}=0\cup\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ folgen, q.e.a. 2. $L_a\to L_{\bar{a}}$, $R_a\to R_{\bar{a}}$ ist ein Epimorphismus des Multiplikationsringes R von $\mathfrak{o}$ auf den Multiplikationsring von $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$. Sein Kern enthält wegen $\mathfrak{W}\mathfrak{o}=\mathfrak{w}$ das Radikal $\mathfrak{W}$ von R. Da R nach Voraussetzung primär, d.h. $R/\mathfrak{W}$ einfach ist, muß dieser Kern gleich dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{W}$ von R sein. Demnach ist der halbeinfache Ring $R/\mathfrak{W}$ der Multiplikationsring des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ und damit auch $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ einfach, denn der Multiplikationsring eines Ringes ist bekanntlich (s. z.B. Albert [1]) dann und nur dann einfach, wenn der Ausgangsring es ist.

Die bei dem Beweis des Satzes 1 soeben benutzte Bemerkung legt natürlich die Vermutung nahe, daß auch umgekehrt aus der Einfachheit von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ die von $R/\mathfrak{W}$ folge. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigen wird, sondern man muß noch voraussetzen, daß das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ genügend groß ist.

Beispiel. Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ nach seinem Radikal $\mathfrak{w}$ sei der kommutative Körper $K=Q(\sqrt{2})$, wobei Q der Körper der rationalen Zahlen ist. Die Elemente des Multiplikationsringes R' von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ werden von den Multiplikationen L_a und R_a aus dem Multiplikationsring R von $\mathfrak{o}$ induziert. Falls R primär ist, ist (nach Satz 1) $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{W}$ das Radikal von R. Hieraus folgt, daß $R/\mathfrak{W}$ als einfacher Ring der Multiplikationsring R' des Körpers $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}\cong Q(\sqrt{2})$ und damit zu $Q(\sqrt{2})$ isomorph ist. Neben L_1 darf daher R nicht noch ein weiteres, zu L_1 modulo $\mathfrak{W}$ inkongruentes Idempotent η enthalten. $\mathfrak{o}$ bestehe nun aus den Matrizen

$$a=\begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_1 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrixelemente x_i und y_k die rationalen Zahlen durchlaufen. Mit ν sei das Element $x_1=0$, $x_2=1$, $y_1=y_2=y_3=y_4=0$ bezeichnet, also das $\sqrt{2}$ in $\mathfrak{o}=K+\mathfrak{w}$ entsprechende Element. Das Zentrum von K ist K selbst, aber das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{o}$ ist nur Q. Die Gleichungen $(L_\nu-R_\nu)^2=4L_1-2L_\nu R_\nu$ und daraus dann $(L_\nu-R_\nu)^4=8(L_\nu-R_\nu)^2$ lassen sich leicht verifizieren und

führen auf das idempotente Element $\eta = \frac{1}{8}(L_v - R_v)^2$ aus R. Seine Wirkung auf ein beliebiges Element a aus $\mathfrak{o}$ beschreibt

$$4\eta a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2y_1 - 2y_4 & 2y_2 - 4y_3 \\ 0 & 0 & 2y_3 - y_2 & 2y_4 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieran sieht man sofort, daß $L_1 - \eta$ nicht in $\mathfrak{W}$ liegen kann, denn $\eta a \in \mathfrak{w}$ und $L_1 a = a$ implizieren, daß $L_1 - \eta$ nicht nilpotent ist.

SATZ 2. *Voraussetzungen:* $\mathfrak{o}$ *sei ein Artin-Ring mit Einselement und habe endlichen Rang über seinem Zentrum* $\mathfrak{z}$. *Für* $z \in \mathfrak{z}$ *sei* $z \to \bar{z} = z \bmod \mathfrak{w}$ *ein Epimorphismus auf das Zentrum von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$. *Der Multiplikationsring von* $\mathfrak{o}$ *sei* R.

Behauptungen: 1. R *ist dann und nur dann primär, wenn* $\mathfrak{o}$ *es ist.*

2. *Bei primärem* $\mathfrak{o}$ *ist* $R/\mathfrak{W}$ *der Multiplikationsring von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, *und es gilt*

3. $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$. *Hierin bedeuten* $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = \{\tau \mid \tau \in R, \tau\mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{w}\}$ *und* $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ *das von den Ringen* $L_\mathfrak{w}$ *und* $R_\mathfrak{w}$ *in* R *erzeugte Ideal.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{o}$ primär. Wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{W}$ ist $\mathfrak{W}\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{W}\mathfrak{o} \subseteqq \mathfrak{w}$, da $\mathfrak{w}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}$ ist. Andererseits ist mit dem Radikal $\mathfrak{w}$ wegen der Vertauschbarkeit der L_a mit den R_b auch das Ideal $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ aus R nilpotent, liegt also in $\mathfrak{W}$. Zum Beweis von $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) = (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ muß man nur noch $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o}) \subseteqq (L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ zeigen. Angenommen, es existierte ein Element τ in $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$, welches nicht in $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ läge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei in der Darstellung (1) von τ durch die L_{a_i} und R_{b_i} kein a_i oder b_i in $\mathfrak{w}$ und die Länge von τ, d.h. die Zahl n, minimal. Da kein a_i oder b_i in $\mathfrak{w}$ liegt, induzieren diese die von 0 verschiedenen Elemente $L_{\bar{a}_i}, R_{\bar{b}_i}$ aus dem Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, wobei gemäß (1) das Element

$$\bar{\tau} = L_{\bar{a}_1} R_{\bar{b}_1} + \cdots + L_{\bar{a}_n} R_{\bar{b}_n} = L_{\bar{0}} \tag{4}$$

ist. Da nun $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ein einfacher Ring und $\bar{\mathfrak{z}}$ nach Voraussetzung das ganze Zentrum von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist, ist nach ARTIN, NESBITT, THRALL [2], Theorem 7.1.D, der Epimorphismus (2) des über $\bar{\mathfrak{z}}$ gebildeten Kronecker-Produktes $\bar{\mathfrak{o}} \otimes \bar{\mathfrak{o}}^*$ auf den Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ ein Isomorphismus, also impliziert (4) die Gleichung

$$\bar{a}_1 \otimes \bar{b}_1 + \cdots + \bar{a}_n \otimes \bar{b}_n = \bar{0}. \tag{5}$$

Nach Definition der Kronecker-Produkte folgt hieraus die lineare Abhängigkeit der $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ über $\bar{\mathfrak{z}}$. Sei etwa $\bar{a}_n = \bar{a}_1 \bar{z}_1 + \cdots + \bar{a}_{n-1} \bar{z}_{n-1}$, $z_i \in \mathfrak{z}$. Dann unterscheiden sich τ und

$$\tau_1 = L_{a_1} R_{b_1 - z_1 b_n} + \cdots + L_{a_{n-1}} R_{b_{n-1} - z_{n-1} b_n} \tag{6}$$

voneinander nur um ein Element aus $L_\mathfrak{w}$. Läßt man nun in (6) alle diejenigen Summanden fort, in denen $b_j - z_j b_n$ in $\mathfrak{w}$ liegt, so erhielte man ein Element τ_2 in $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$, welches nicht in $(L_\mathfrak{w}, R_\mathfrak{w})$ läge, aber geringere Länge hätte, q.e.a. —

Die damit bewiesene Gleichung $\mathfrak{W}=(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$ impliziert, daß der von $L_a \to L_{\bar{a}}$, $R_a \to R_{\bar{a}}$ induzierte Epimorphismus $\tau \to \bar{\tau}$ von R auf den Multiplikationsring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ als Kern $(\mathfrak{w}:\mathfrak{o})$ gerade das Radikal $\mathfrak{W}$ von R besitzt. $R/\mathfrak{W}$ ist demnach der Multiplikationsring des nach Voraussetzung einfachen Ringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$, also selbst ein einfacher Ring. — Die übrigen Behauptungen von Satz 2 sind bereits im Satz 1 gezeigt.

Der primäre Ring $\mathfrak{o}$ genüge nun den Voraussetzungen von Satz 2. Auf ihn als treuen R-Modul läßt sich die Theorie der distributiv darstellbaren Ringe folgendermaßen anwenden. Der Exponent des Radikales $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ sei e. Aus $\mathfrak{W}=(L_{\mathfrak{w}}, R_{\mathfrak{w}})$ folgt, daß e auch der Exponent des Radikales $\mathfrak{W}$ von R ist. Nach Behrens [4], Sätze 2 und 3, ist der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale von $\mathfrak{o}$, d.h. der R-Untermoduln von $\mathfrak{o}$, genau dann distributiv, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der $\mathfrak{W}^k\mathfrak{o}$, $k=0, 1, \ldots, e-1$, besteht. Da andererseits die Potenzen $\mathfrak{w}^k$ in $\mathfrak{V}$ liegen, ist, in Ergänzung der dritten Behauptung des Satzes 2, $\mathfrak{w}^k=\mathfrak{W}^k\mathfrak{o}$ und damit folgender Satz bewiesen.

Satz 3. *Voraussetzungen: Der primäre Ring $\mathfrak{o}$ mit Einselement habe endlichen Rang über seinem Zentrum $\mathfrak{z}$. Sei $\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z} \bmod \mathfrak{w}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{w}$ und e der Exponent von $\mathfrak{w}$. Behauptung: Der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale in $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann distributiv, wenn $\mathfrak{V}$ aus der Kette der Potenzen $\mathfrak{w}^k$, $k=0, 1, \ldots, e-1$, des Radikales $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{o}$ besteht.*

Für einen vollständig primären Ring $\mathfrak{o}$ läßt sich sogar der folgende Satz beweisen.

Satz 4. *Voraussetzungen: Das Zentrum $\mathfrak{z}$ des Körpers K in dem vollständig primären Ring $\mathfrak{o}=K+\mathfrak{w}$ sei auch das Zentrum von $\mathfrak{o}$. Der Rang von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ sei endlich. Behauptungen: Der Verband $\mathfrak{V}$ der Ideale der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ ist dann und nur dann distributiv, wenn der Verband aller Linksideale von $\mathfrak{o}$ nur aus der Kette der $\mathfrak{w}^k$ besteht, also mit $\mathfrak{V}$ übereinstimmt. In diesem Falle ist $\mathfrak{o}$ ein einreihiger Ring.*

Beweis. Nach Satz 3 und Behrens [4], Sätze 2 und 3, ist zu zeigen, daß, falls $\mathfrak{V}$ distributiv ist, die Potenzen $\mathfrak{w}^k$ eine maximale Kette von Linksidealen in der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ bilden. Für $k=0, 1, \ldots, e-1$, ist $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ein (K, K)-Modul oder, anders ausgedrückt, ein $K \otimes K^*$-Linksmodul, wobei das Kronecker-Produkt über $\mathfrak{z}$ zu nehmen ist. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{z}$ das Zentrum von K ist und mit $\mathfrak{o}$ auch K endlichen Rang über $\mathfrak{z}$ hat, ist $K \otimes K^*$ ein einfacher Artin-Ring. $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ist demnach vollreduzibel und seine irreduziblen Summanden sind isomorph zu dem K-Doppelmodul K. In $\mathfrak{w}^k \setminus \mathfrak{w}^{k+1}$ existiert demnach ein Element u derart, daß $K\bar{u}$ ein irreduzibler K-Doppelmodul in $\mathfrak{w}^k/\mathfrak{w}^{k+1}$ ist. Dies impliziert, daß $Ku \cup \mathfrak{w}^{k+1}$ ein in $\mathfrak{w}^k$ enthaltenes (zweiseitiges) echtes Oberideal von $\mathfrak{w}^{k+1}$ ist. Gemäß der Voraussetzung über den Verband $\mathfrak{V}$ ist demnach $\mathfrak{w}^k=Ku \cup \mathfrak{w}^{k+1}$. Da K ein Körper ist, ist jedes minimale Linksoberideal von $\mathfrak{w}^{k+1}$ ebenfalls $\mathfrak{w}^k$. — Aus der Endlichkeit des Ranges der Algebra $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{z}$ folgt, daß jeder Isomorphismus von K in sich ein Automorphismus von K ist. Dies zieht gemäß §2, Satz 1, die Einreihigkeit von $\mathfrak{o}$ nach sich.

Literatur

[1] Albert, A. A.: Non-associative algebras I. Ann. of Math. (2) **43**, 685—707 (1942).
[2] Artin, E., C. J. Nesbitt and R. M. Thrall: Rings with minimum condition. Ann. Arbor 1944.
[3] Baer, R.: A unified theory of projective spaces and finite abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc. **52**, 283—343 (1942).
[4] Behrens, E.-A.: Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Arch. der Math. **8**, 265—273 (1957).
[5] — Distributiv darstellbare Ringe. Math. Z. **73**, 409—432 (1960).
[6] — Distributiv darstellbare Ringe II. Math. Z. **76**, 367—384 (1961).
[7] Jacobson, N.: Structure of rings. Providence 1956.
[8] Kasch, F.: Halblineare Abbildungen und Rangrelationen bei Galoisschen Erweiterungen. Arch. d. Math. **4**, 402—407 (1953).
[9] Köthe, G.: Verallgemeinerte abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring. Math. Z. **39**, 31—44 (1935).
[10] Wall, D. W.: Characterizations of generalized uniserial algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 161—170 (1959).

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 24. April 1961)

Kasch, F.
Math. Zeitschr. 77, 219—227 (1961)

Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Friedrich Kasch

1. Einleitung

Für die Kohomologietheorie der endlichen Gruppen ist bekanntlich die Tatsache von Bedeutung, daß eine Isomorphie zwischen der k-ten Homologie- und der $-(k+1)$-ten Kohomologiegruppe der gegebenen Gruppe G mit Koeffizienten in einem beliebigen G-Modul C besteht:

$$H_k(G, C) \cong H^{-k-1}(G, C) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

Dieser Zusammenhang soll hier für eine beliebige Frobenius-Erweiterung Γ/A an Stelle des Gruppenrings untersucht werden.

Ein Ansatz in dieser Richtung liegt bereits durch T. Nakayama [3, 4] vor, doch erfolgt dort (anderen Zielsetzungen entsprechend) eine Beschränkung auf die Homologie- und Kohomologiegruppen einer Frobenius-Algebra Γ/K; d.h. es wird Γ/K zentral vorausgesetzt und der aufzulösende Modul ist Γ selbst als zweiseitiger Γ-Modul.

Diese Beschränkungen werden hier fallen gelassen. Wir gehen von einer beliebigen Frobenius-Erweiterung Γ/A aus und zeigen zunächst, daß auch jetzt — wie bei einer Frobenius-Algebra — ein Nakayama-Automorphismus existiert; allerdings ist dies jetzt ein Automorphismus des Zentralisators P von A in Γ. Sei nun Γ/A eine freie Frobenius-Erweiterung, so daß eine Spurbildung (in der Kohomologie der Gruppen Norm genannt) existiert[1]), und sei A ein Γ-Linksmodul. Für $f \in \mathrm{Hom}({}_AA, {}_AA)$ ist dann $\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma\Gamma)$ und für $\varrho \in \mathsf{P}$ gilt

$$\mathrm{Spur}\,(f\varrho)\,(x) = \mathrm{Spur}\, f(x)\,\varrho', \qquad x \in A, \tag{2}$$

wobei ϱ' das Bild von ϱ bei dem Nakayama-Automorphismus ist. Seien C ein Γ-Linksmodul und C^0 ein daraus mittels des Nakayama-Automorphismus gebildeter P-Linksmodul, dann folgt aus (2), daß die Abbildung

$$\mathrm{Hom}({}_AA, {}_AA) \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$$

einen Homomorphismus liefert. Dieser Homomorphismus führt zu Aussagen, die als Spezialfall wieder (1) enthalten.

---

[1]) Siehe Zusatz bei der Korrektur am Ende der Arbeit.

2. Der Nakayama-Automorphismus einer Frobenius-Erweiterung

Wir wollen zuerst einige Bezeichnungen festsetzen. Sind Γ und Λ Ringe, so sei ${}_\Gamma A_\Lambda$ ein Γ-Λ-Modul. Hat man ferner einen Modul B_Λ, dann sei $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ der Modul der Λ-Homomorphismen von A in B (der sonst meist mit $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ bezeichnet wird). Gilt außerdem ${}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ durch die Festsetzung

$$(\lambda f \gamma)(x) = \lambda f(\gamma x), \qquad (\lambda \in \Lambda,\ f \in \mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda),\ \gamma \in \Gamma,\ x \in A)$$

zu einem Λ-Γ-Modul, d.h. es ist ${}_\Lambda\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)_\Gamma$. Hat man Modulen ${}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$ durch die Festsetzung

$$(\gamma f \lambda)(x) = f(x\gamma)\lambda$$

zu einem Γ-Λ-Modul, d.h. es ist ${}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)_\Lambda$. Sind die Modulen ${}_\Gamma A_\Lambda$ und ${}_\Gamma C_\Lambda$ Γ-Λ-isomorph, dann wird ${}_\Gamma A_\Lambda \cong {}_\Gamma C_\Lambda$ geschrieben. Analog sei die Bezeichnungsweise in anderen Fällen.

Wir kommen nun zur Definition einer Frobenius-Erweiterung Γ/Λ. Dies ist (nach [5] und [6][2]) eine unitäre Ringerweiterung mit folgenden Eigenschaften:

(r 1) ${}_\Lambda\Gamma_\Gamma \cong {}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)_\Gamma$;

(r 2) Γ_Λ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ist außerdem Γ_Λ frei, dann heißt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung.

Diese rechtsseitigen Bedingungen sind äquivalent mit analogen linksseitigen Bedingungen:

(l 1) ${}_\Gamma\Gamma_\Lambda \cong {}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)_\Lambda$;

(l 2) ${}_\Lambda\Gamma$ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ferner ist eine rechtsseitig freie Frobenius-Erweiterung auch linksseitig frei und umgekehrt.

Sei jetzt h das Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (r 1); wir nennen h einen Frobenius-Homomorphismus. Damit erhält man (r 1) explizit in der Form

$$\Gamma \ni \gamma \to h\gamma \in h\Gamma = \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda). \tag{3}$$

Da (r 1) insbesondere Λ-linkszulässig ist, folgt $h \in \mathrm{Hom}({}_1\Gamma_1, {}_1\Lambda_1)$. Es ist ferner klar, daß h durch (r 1) nur bis auf Multiplikation von rechts mit einem invertierbaren Element aus dem Zentralisator P von Λ in Γ eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun feststellen, daß dieses h auch als Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (l 1) auftritt, so daß (l 1) mit dem gleichen h durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \gamma h \in \Gamma h = \mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda) \tag{4}$$

[2]) Diese Arbeiten stimmen in wesentlichen Teilen nahezu überein. Bei Veröffentlichung meiner Arbeit [6] war mir die kurz zuvor erschienene Arbeit [5] leider nicht bekannt. Der Begriff der Frobenius-Erweiterung ist in [5] etwas allgemeiner als in [6] gefaßt. Hier wird die Definition aus [6] zugrunde gelegt, doch lassen sich die folgenden Überlegungen auch für die allgemeinere Definition durchführen.

gegeben wird. Diese Behauptung wird bei dem Äquivalenzbeweis von (r 1), (r 2) und (l 1), (l 2) folgendermaßen mitgeliefert: Wegen (r 2) besteht die Isomorphie

$$(5) \qquad {}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda} \cong {}_{\Gamma}\mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right), {}_{\Lambda}\Lambda\right)_{\Lambda},$$

die explizit durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \left(\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right) \ni f \to f(\gamma) \in \Lambda\right) \in \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right), {}_{\Lambda}\Lambda\right)$$

gegeben wird. Setzt man (r 1) auf der rechten Seite von (5) ein, so folgt (l 1). Berücksichtigt man dabei (3), so ergibt sich insbesondere für $1 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \Gamma \ni 1 &\to \left(\mathrm{Hom}\left(\Gamma_{\Lambda}, \Lambda_{\Lambda}\right) \ni f \to f(1) \in \Lambda\right) \\ &= \left(h\,\Gamma \ni h\gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\right) \\ &\to \left(\Gamma \ni \gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\right) = h \in \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma, {}_{\Lambda}\Lambda\right). \end{aligned}$$

Damit ist (4) bewiesen.

Um den Nakayama-Automorphismus zu definieren, haben wir $\mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Lambda}\Lambda_{\Lambda}\right)$ zu betrachten. Wegen (3) und (4) gilt offenbar

$$(6) \qquad h\,\mathsf{P} = \mathsf{P}\,h = \mathrm{Hom}\left({}_{\Lambda}\Gamma_{\Lambda}, {}_{\Lambda}\Lambda_{\Lambda}\right); \qquad h\,\mathsf{P}_{\mathsf{P}} \cong \mathsf{P}_{\mathsf{P}}, \qquad {}_{\mathsf{P}}\mathsf{P}\,h \cong {}_{\mathsf{P}}\mathsf{P}.$$

Folglich gibt es zu jedem $\varrho \in \mathsf{P}$ bzw. $\varrho' \in \mathsf{P}$ ein eindeutig bestimmtes ϱ' bzw. ϱ so, daß $h\,\varrho = \varrho'\,h$ gilt. Man stellt nun sofort fest, daß die Zuordnung

$$\mathsf{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathsf{P}$$

ein Automorphismus von P ist, der, wie bisher in der Literatur bei Frobenius-Algebren, wo $\mathsf{P} = \Gamma$ ist, als Nakayama-Automorphismus bezeichnet werden soll. Da h bis auf Multiplikation mit invertierbaren Elementen aus P eindeutig bestimmt ist, ist der Nakayama-Automorphismus von P durch Γ/Λ bis auf innere Automorphismen von P eindeutig bestimmt.

Ist der Nalayama-Automorphismus von P bereits selbst ein innerer Automorphismus, dann soll die Frobenius-Erweiterung Γ/Λ symmetrisch heißen. In diesem Falle kann man h so wählen, daß der Nakayama-Automorphismus zum identischen Automorphismus wird.

Sei jetzt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung. Dann gibt es zu dem Frobenius-Homomorphismus h duale Basen von Γ/Λ, d.h. es existieren eine Linksbasis $l_1, \ldots, l_n$ und eine Rechtsbasis $r_1, \ldots, r_n$ von Γ/Λ mit $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$. Das bedeutet, daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ aus

$$(7) \qquad l_i \gamma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n$$

die Gleichungen

$$(8) \qquad \gamma r_j = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n$$

folgen und umgekehrt.

Sei nun $\varrho \in \mathsf{P}$ und ϱ' das Bild von ϱ bei dem zu h gehörenden Nakayama-Automorphismus. Dann ergibt sich aus

$$h(\varrho\, l_i r_j) = h(l_i r_j \varrho'),$$

daß aus

$$\varrho\, l_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

die Gleichungen

$$r_j \varrho' = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{10}$$

folgen und umgekehrt. Diese Tatsache soll nun benutzt werden, um eine Aussage über die Spur eines Λ-Homomorphismus zu machen.

3. Eigenschaften der Spur

Für einen Modul ${}_\Gamma A$ sei $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda \Lambda)$; die durch

$$A \ni x \to \sum_{i=1}^{n} r_i f(l_i x) \in \Gamma$$

gegebene Abbildung wird Spur f genannt. Wegen (7) und (8) gilt

$$\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma \Gamma). \tag{11}$$

Ist $A = {}_\Gamma A_\Lambda$ und $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda)$, dann folgt $\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$. Aus (9) und (10) ergibt sich für beliebiges $\varrho \in \mathsf{P}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{Spur}\,(f\varrho)\,(x) &= \sum_{i=1}^{n} r_i f(\varrho\, l_i x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varrho' f(l_i x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i f(l_i x)\, \varrho' = \mathrm{Spur}\, f(x)\, \varrho'. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

HILFSSATZ 1. *Die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda) = h\,\mathsf{P} \ni h\,\varrho \to \mathrm{Spur}\,(h\varrho) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Wegen $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$ gilt

$$\mathrm{Spur}\, h(r_j) = \sum_{i=1}^{n} r_i h(l_i r_j) = r_j,$$

woraus

$$\mathrm{Spur}\, h = 1_\Gamma \quad (= \text{identische Abbildung von } \Gamma) \tag{13}$$

folgt. Aus (12) und (13) ergibt sich dann

$$\mathrm{Spur}\,(h\varrho)\,(x) = x\,\varrho',$$

d.h. $\mathrm{Spur}\,(h\varrho)$ ist die Rechtsmultiplikation von Γ mit $\varrho' \in \mathsf{P}$. Da die Rechtsmultiplikationen mit Elementen aus P genau alle Elemente aus $\mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$ liefern, ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Gegeben sei jetzt ein Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ mit

$$A = \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma x_j, \qquad {}_\Gamma \Gamma x_{j\Lambda} \cong {}_\Gamma \Gamma_\Lambda, \qquad \lambda x_j = x_j \lambda \quad (\lambda \in \Lambda;\ j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Wir schreiben zur Abkürzung $A^* = \mathrm{Hom}({}_1A_1, {}_1\Lambda_1)$ und bezeichnen mit h_i die durch

$$h_i\Big(\sum_{j=1}^{m}\gamma_j x_j\Big) = h(\gamma_i) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

definierte Abbildung aus A^*.

Hilfssatz 2. *Es gilt*

$$A^* = \bigoplus_{j=1}^{m} h_j \mathsf{P}, \qquad h_j \mathsf{P}_\mathsf{P} \cong \mathsf{P}_\mathsf{P} \tag{16}$$

und die Zuordnung

$$A^* \ni f \to \mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda) \tag{17}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Folgt wegen (14) sofort aus (6) und Hilfssatz 1.

4. Dualitätseigenschaften

Zu dem beliebigen Modul ${}_\mathsf{P}C$ definieren wir mit Hilfe des Nakayama-Automorphismus $\mathsf{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathsf{P}$ einen neuen Modul C^0. Sei C^0 eine zu C isomorphe additive Gruppe mit dem Isomorphismus

$$C^0 \ni c^0 \to c \in C.$$

Die Multiplikation $\circ$ mit Elementen aus P wird nun durch

$$\varrho \circ c^0 = (\varrho' c)^0$$

festgesetzt, wodurch C^0 zu einem P-Linksmodul wird.

Seien nun beliebige Modulen ${}_\Gamma A$ und ${}_\Gamma C$ gegeben. Dann ist $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda)$ ein P-Rechtsmodul und wegen (11) und (12) wird durch

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda) \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \tag{18}$$

ein Homomorphismus φ geliefert[3]). Dieser Homomorphismus soll weiterhin untersucht werden. Dazu setzen wir jetzt einen Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ voraus und beschränken uns auf der linken Seite von (18) auf den Untermodul $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ von $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda)$.

Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann fallen diese Modulen zusammen. Im allgemeinen aber ist es gerade wesentlich, daß wir den Modul A^* zugrunde legen, da dieser die gewünschten Dualitätsaussagen ermöglicht.

Wir bemerken zuerst, daß φ in ${}_\Gamma A_\Lambda$ und ${}_\Gamma C$ funktoriell ist. Für C ist das unmittelbar klar. Seien nun ${}_\Gamma B_\Lambda$ und ein Homomorphismus β: ${}_\Gamma A_\Lambda \to {}_\Gamma B_\Lambda$ gegeben, dann ist das Diagramm

$$\begin{cases} B^* \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_\Lambda)\otimes 1_{C^0}} & A^* \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\ \mathrm{Hom}({}_\Gamma B, {}_\Gamma C) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_C)} & \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \end{cases} \tag{19}$$

[3]) Im Spezialfall der Kohomologie der Gruppen vgl. [1], S. 240, (5).

wegen $\mathrm{Spur}(f\beta) = \mathrm{Spur} f \cdot \beta$ kommutativ, wie man unmittelbar nachprüft. Also ist φ auch in A funktoriell.

Die grundlegende Eigenschaft von φ formulieren wir in folgendem

SATZ 1. *Gegeben seien ein Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$, der* (14) *genügt, und ein beliebiger Modul ${}_\Gamma C$. Dann ist*

$$(20) \qquad \varphi\colon A^* \underset{\mathfrak{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to \big(A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C\big) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$$

ein in A und C funktorieller Isomorphismus.

BEMERKUNGEN. 1. Der Satz gilt auch für jeden Γ-Λ-direkten Summanden von A.

2. Der Isomorphismus (20) kann wegen (17) folgendermaßen zerlegt werden:

$$A^* \underset{\mathfrak{P}}{\otimes} C^0 \to \mathrm{Spur}\, A^* \underset{\mathfrak{P}}{\otimes} C = \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda) \underset{\mathfrak{P}}{\otimes} C \to \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C).$$

Zum Beweis des Satzes benutzen wir die durch (16) gegebene eindeutige Darstellung der Elemente aus $A^* \underset{\mathfrak{P}}{\otimes} C^0$ in der Form $\sum_{j=1}^{m} h_j \otimes c_j^0$. Wegen (15) und (13) folgt für die Elemente x_i aus (14)

$$(21) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Spur}\, h_j(x_i)\, c_j = \mathrm{Spur}\, h(1)\, c_i = c_i, \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Folglich ist φ ein Monomorphismus. Sei nun $f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$, dann gilt nach (21)

$$\varphi\colon \sum_{j=1}^{m} h_j \otimes f(x_j) \to f,$$

d.h. φ ist auch ein Epimorphismus. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Anwendung in der homologischen Algebra

Eine vollständige projektive Auflösung eines Moduls A_Γ bzw. ${}_\Gamma A$ ist eine exakte Folge von projektiven Moduln $A_i{}_\Gamma$ bzw. ${}_\Gamma A_i$:

$$\mathfrak{A}\colon \quad \cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} A_{-2} \to \cdots$$

mit

$$\mathrm{Bild}(\alpha_0) = \mathrm{Kern}(\alpha_{-1}) \cong A.$$

Mit einem beliebigen Modul ${}_\Gamma C$ bilde man dann im Falle A_Γ den Komplex $\mathfrak{A} \underset{\Gamma}{\otimes} C$ und im Falle ${}_\Gamma A$ den Komplex $\mathrm{Hom}({}_\Gamma \mathfrak{A}, {}_\Gamma C)$. Die Faktoren des ersten Komplexes bezeichnen wir mit $H_k^\Gamma(A, C)$ die des zweiten mit $H_\Gamma^k(A, C)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dann gilt offenbar

$$\left.\begin{aligned} H_k^\Gamma(A, C) &= \mathrm{Tor}_k^\Gamma(A, C) \\ H_\Gamma^k(A, C) &= \mathrm{Ext}_\Gamma^k(A, C) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

Satz 2. *Es sei Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung, und es besitze der Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ als Γ-Modul eine vollständige projektive Auflösung durch Modulen A_k, die alle* (14) *genügen und wobei die Kerne jeweils als Λ-Λ-Modulen direkte Summanden sind. Dann gilt für jeden Modul ${}_\Gamma C$:*

$$H_k^{\mathsf{P}}(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ die gegebene vollständige Auflösung von A, dann ist die Folge

$$\mathfrak{A}^*: \quad \cdots \to A_{-2}^* \to A_{-1}^* \to A_0^* \to A_1^* \to A_2^* \to \cdots$$

wieder exakt und die Moduln der Folge sind nach (16) freie P-Rechtsmoduln. Folglich ist dies eine vollständige projektive Auflösung des P-Rechtsmoduls A^*. Nach Satz 1 folgt dann die Behauptung.

Es erhebt sich nun die Frage, wann die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Dazu beschränken wir uns auf zentrale Frobenius-Erweiterungen, da eine entsprechende Aussage dann einfach zu formulieren ist und die erwähnten Beispiele bereits durch diesen Fall erfaßt werden. Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann ist $\mathsf{P} = \Gamma$ und jeder Modul ${}_\Gamma A$ ist zufolge der Festsetzung $a\lambda = \lambda a$ auch ein Λ-Rechtsmodul; z.B. ist dann $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_A\Lambda_\Lambda) = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_A\Lambda)$, d.h. A^* ist der im üblichen Sinne duale Modul.

Satz 3. *Es seien Γ ein Noetherscher Ring und Γ/Λ eine unitäre zentrale, endlich erzeugte, freie Ringerweiterung. Ist der Modul ${}_\Gamma A$ als Λ-Linksmodul endlich erzeugt und projektiv, dann existiert eine (Γ, Λ)-exakte*[4]) *vollständige Auflösung von A aus endlich erzeugten freien Γ-Moduln.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich nach bekannten Schlüssen, doch soll er der Vollständigkeit halber angegeben werden. Zu A gibt es einen endlich erzeugten freien Γ-Modul A_0 so, daß $A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$ exakt ist. Da ${}_\Lambda A$ projektiv ist, ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ Λ-direkter Summand in A_0. Da ${}_\Gamma A_0$ Γ-frei und ${}_\Lambda\Gamma$ Λ-frei sind, ist ${}_\Lambda A_0$ Λ-projektiv; dann ist auch $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ als direkter Summand Λ-projektiv. Als Untermodul des Moduls A_0 mit Maximalbedingung ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ ein endlich erzeugter Λ-Modul. Nun folgt durch Induktion, daß eine (Γ, Λ)-exakte Auflösung von A durch endlich erzeugte freie Γ-Moduln existiert. Das gleiche gilt für A_Γ^*. Wegen ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ erhält man die gesuchte vollständige Auflösung von A, indem man an die angegebene Auflösung von A die durch Dualisieren der entsprechenden Auflösung von A^* entstehende Folge anhängt[5]). Damit ist Satz 3 bewiesen.

Nach Satz 2 gilt dann also unter den Voraussetzungen von Satz 3

$$H_k^\Gamma(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Da unter den Voraussetzungen von Satz 3 ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ gilt und A^* die gleichen Voraussetzungen für die rechte Seite wie A für die linke Seite erfüllt, folgt

[4]) Im Sinne der relativen homologischen Algebra; s. dazu [2].

[5]) Siehe dazu auch die Schlußbemerkung über vollständige Auflösungen.

für A_Γ unter den entsprechenden Voraussetzungen

$$H_k^\Gamma(A, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A^*, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Im Falle der Kohomologie einer endlichen Gruppe G ist $\Lambda = \mathsf{Z}$ (= Ring der ganzen Zahlen), $\Gamma = \mathsf{Z}[G]$ und $A = \mathsf{Z}$ als trivialer G-Modul. Da $\mathsf{Z}[G]/\mathsf{Z}$ symmetrisch ist, folgt $C = C^0$ und wegen ${}_G\mathsf{Z} \cong {}_G\mathsf{Z}^*$ ergibt sich schließlich wieder (1).

Aber auch der Fall der Kohomologie von Frobenius-Algebren ist in unseren Überlegungen enthalten. Sei Γ/K eine Frobenius-Algebra (d.h. eine zentrale Frobenius-Erweiterung) über einem Körper K, dann ist auch $\Gamma^e = \Gamma \underset{\mathsf{K}}{\otimes} \Gamma^*$, wobei Γ^* die zu Γ invers-isomorphe Algebra ist, eine Frobenius-Algebra über K. Dann wird Γ als Γ^e-Linksmodul betrachtet, und dafür sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt.

6. Vollständige projektive Auflösungen bei Frobenius-Erweiterungen

Wir wollen mit einer Bemerkung über vollständige projektive Auflösungen schließen. Eine solche Auflösung eines Moduls etwa über einer Algebra gewinnt man üblicher Weise so, wie das im Beweis von Satz 3 durchgeführt worden ist. Für die projektiven Auflösungen, von denen man ausgeht, nimmt man meist die Standardauflösungen. Bei einer Frobenius-Erweiterung bietet sich jedoch noch eine andere Möglichkeit, die jetzt angegeben werden soll.

Sei Γ/Λ zunächst eine beliebige unitäre Ringerweiterung, dann erhält man zu einem Modul ${}_\Gamma A$ die (Γ, Λ)-projektive Standardauflösung in der Form

$$\cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$$

mit

$$A_k = \underbrace{\Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \cdots \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma}_{(k+1)\text{-mal}} \underset{\Lambda}{\otimes} A, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

schreibt man für ein beliebiges Element aus A_k

$$\gamma_{k+1} \otimes \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_0,$$

wobei also $\gamma_0 \in A$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1} \in \Gamma$, dann ist der Homomorphismus α_k durch

$$\alpha_k(\gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1}\gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben. In dualer Weise erhält man eine (Γ, Λ)-injektive Auflösung von A in der Form

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} A^2 \to \cdots \tag{22}$$

mit

$$A^k = \underbrace{\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, \ldots, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda A) \ldots))}_{(k+1)\text{-mal}}$$

wobei die Abbildungen α^k in dualer Weise zu den α_k definiert werden. Ist nun Γ/Λ eine Frobenius-Erweiterung, dann gilt ${}_\Gamma A_k \cong {}_\Gamma A^k$. Ist Γ/Λ außerdem frei mit den dualen Basen $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$, so ergibt sich aus (22)

$$0 \to A \xrightarrow{\beta_0} A_0 \xrightarrow{\beta_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2} A_2 \to \cdots,$$

wobei β_k durch

$$\beta_k(\gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-i} \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1} \otimes r_j \otimes l_j \gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben wird. Eine vollständige (Γ, Λ)-projektive (und (Γ, Λ)-injektive) Auflösung von A erhält man dann durch

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots \to A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\beta_0 \alpha_0} & A_0 & \xrightarrow{\beta_1} & A_1 & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \to \cdots. \\ & & & & & {\scriptstyle \alpha_0}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \beta_0} & & & \\ & & & & & & A & & & & \\ & & & & & \nearrow & & \searrow & & & \\ & & & & & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

Ist ${}_\Lambda A$ endlich erzeugt und Λ-projektiv bzw. Λ-frei, dann ist jeder der Moduln ${}_\Gamma A_k$ endlich erzeugt und Γ-projektiv bzw. Γ-frei. Letzteres ist in Kohomologie der Gruppen und der Frobenius-Algebren der Fall.

Zusatz bei der Korrektur am 7. September 1961. Nach einer brieflichen Mitteilung von K. Gruenberg, London, existiert auch bei einer projektiven Frobenius-Erweiterung eine Spur mit den gleichen Eigenschaften wie bei einer freien Frobenius-Erweiterung. Daher gelten die hier gewonnenen Resultate z.T. auch für projektive Frobenius-Erweiterungen. — Die Spur erhält man folgendermaßen: Sei τ der zu (3) inverse Isomorphismus, dann bezeichne $\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes l_j$ das Bild von τ bei dem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, A_\Lambda), {}_A\Gamma) \to \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma;$$

die Elemente $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$ treten dann zur Spurbildung an die Stelle der dualen Basen bei einer freien Frobenius-Erweiterung.

Literatur

[1] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton Press 1956.

[2] Hochschild, G.: Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 246—269 (1956).

[3] Nakayama, T.: On the complete cohomology theory of Frobenius algebras. Osaka Math. J. **9**, 165—187 (1957).

[4] — Note on complete cohomology of a quasi-Frobenius algebra. Nagoya Math. J. **13**, 115—121 (1958).

[5] —, and T. Tsuzuku: On Frobenius Extensions. I. Nagoya Math. J. **17**, 89—110 (1960).

[6] Kasch, F.: Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. **1960/61**, 89—109.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Mai 1961)

ROQUETTE, P.
Math. Zeitschr. 77, 228—240 (1961)

Über den Singularitätsgrad von Teilringen in Funktionenkörpern

HERRN FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
PETER ROQUETTE

1. Problemstellung

Es sei

K ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1,
k der Grundkörper von K,
R ein Teilring von K, welcher k enthält und K als Quotientenkörper besitzt,
$\widetilde{R}$ die ganzabgeschlossene Hülle von R in K,
$\mathfrak{f}_R$ der Führerdivisor von R,
$\mathfrak{F}_R$ das Vielfachenideal von $\mathfrak{f}_R$ in R; es kann beschrieben werden als das größte in R enthaltene $\widetilde{R}$-Ideal.

Bei der Untersuchung der Singularitäten von R stellen sich zwei numerische Invarianten ein, die beide als Maß für die Singularitäten dienen können: erstens der sog. *Singularitätsgrad*

$$\delta(R) = \dim_k \widetilde{R}/R,$$

der im Zusammenhang mit dem Riemann-Rochschen Satz auftritt, und zweitens der *Führergrad*

$$d(R) = \operatorname{Grad} \mathfrak{f}_R = \dim_k \widetilde{R}/\mathfrak{F}_R,$$

der vornehmlich bei idealtheoretischen Fragestellungen ins Spiel kommt. Man wird nach einem Zusammenhang zwischen $d(R)$ und $\delta(R)$ fragen. Hier gilt der

SATZ 1. *Falls $R = k[x, y]$ über k durch zwei Elemente x, y erzeugbar ist, so gilt*

$$d(R) = 2\delta(R). \tag{1}$$

Beweise dieses Satzes finden sich bei GORENSTEIN[1]) und bei ROSENLICHT[2]), wo auch seine Bedeutung für die Geometrie der ebenen Kurven herausgestellt wird. Im „klassischen" Falle, wobei k der komplexe Zahlkörper ist, ist der Satz 1 schon seit langem bekannt; er findet sich z. B. in dem Lehrbuch von HENSEL-LANDSBERG[3]). Die Verallgemeinerung auf beliebigen Grundkörper,

[1]) GORENSTEIN, D.: An arithmetic theory of adjoint plane curves. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 414—436 (1952).

[2]) ROSENLICHT, M.: Equivalence relations on algebraic curves. Annals of Math. **56**, insbes. S. 186 (1952).

[3]) HENSEL-LANDSBERG: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, insbes. S. 415. Leipzig 1902.

unter Einschluß der inseparablen Funktionenkörper, scheint zum ersten Male bei GORENSTEIN durchgeführt worden zu sein.

Nach Definition von $\delta(R)$ und $d(R)$ kann die Formel (1) auch in der Form

$$\dim_k \widetilde{R}/R = \dim_k R/\mathfrak{F}_R$$

geschrieben werden. Es ist zu vermuten, daß dieser Anzahlaussage eine *Strukturaussage* für die Moduln $\widetilde{R}/R$ und $R/\mathfrak{F}_R$ zugrunde liegt. Das ist in der Tat der Fall. Nennt man nämlich zwei R-Moduln endlicher Länge „äquivalent" (in Zeichen $\sim$), wenn sie dieselben R-Kompositionsfaktoren besitzen, einschließlich ihrer Vielfachheiten, so lautet die in Rede stehende Strukturaussage wie folgt:

(2) $$\widetilde{R}/R \sim R/\mathfrak{F}_R \qquad \text{(als } R\text{-Moduln)}.$$

Hauptziel der vorliegenden Note ist es, die Gültigkeit dieser Strukturaussage aufzuzeigen. Damit wird sich ein Beweis von Satz 1 ergeben, der wohl einfacher ist als die beiden oben zitierten Beweise.

Unter einem „R-Ideal" wollen wir hier einen endlichen R-Modul aus K verstehen; es werden also auch solche Ideale betrachtet, die nicht in R liegen. Zu jedem R-Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ gehört das dazu „reziproke" Ideal $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ [3a]), bestehend aus allen Elementen $b \in K$ mit $b \cdot \mathfrak{A} < R$. Man beachte nun, daß

$$\mathfrak{F}_R = \frac{R}{\widetilde{R}},$$

zufolge der Kennzeichnung von $\mathfrak{F}_R$ als maximales, in R enthaltenes $\widetilde{R}$-Ideal. Ferner ist offenbar

$$R = \frac{R}{R}.$$

Demnach erscheint die Aussage (2) nur als ein Spezialfall der folgenden, für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ formulierbaren Aussage [4]):

(3) $$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sim \frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}} \qquad (\text{falls } \mathfrak{A} > \mathfrak{B}).$$

Wir werden zeigen, daß auch diese allgemeinere Aussage unter der in Satz 1 angegebenen Voraussetzung richtig ist. Die Unterordnung des Gorensteinschen Satzes unter den allgemeinen Satz (3) bedeutet nicht etwa eine Erschwerung, sondern eine Vereinfachung des Beweises. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Gültigkeit von (3) für alle R-Ideale gleichbedeutend ist mit der Gültigkeit

[3a]) Dieser waagerechte Bruchstrich, der die Bildung von reziproken Moduln andeutet, ist zu unterscheiden von dem schrägen Bruchstrich /, der die Bildung von Restklassenmoduln beschreibt.

[4]) Beim Übergang von (2) zu (3) wird wesentlich die Tatsache benutzt, daß $\widetilde{R}$ als R-Modul endlich, also ein R-Ideal in unserem Sinne, ist. Hierzu vgl. etwa ROQUETTE, P.: Über den Riemann-Rochschen Satz in Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1. Math. Nachrichten **19**, 1958, insbes. S. 393.

der Formel

$$\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} = \mathfrak{A} \tag{4}$$

für alle R-Ideale. Diese letztere Formel läßt sich unter der in Satz 1 angegebenen Voraussetzung verhältnismäßig einfach beweisen, mit Methoden, die ganz der klassischen Dedekindschen Differententheorie nachgebildet sind.

Angesichts der rein idealtheoretischen Formulierung (3) der Behauptung des Satzes von GORENSTEIN entsteht die Frage, ob nicht der Satz von GORENSTEIN für allgemeinere Ringklassen (nicht nur für Teilringe von Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1) gilt. Das ist in der Tat der Fall. Um die entsprechende Verallgemeinerung von Satz 1 zu erhalten, hat man zunächst die in Satz 1 eingehende Erzeugbarkeitsvoraussetzung etwas anders zu fassen:

Wenn R über k durch zwei Elemente x, y erzeugt werden kann, so lassen sich diese Erzeugenden nach dem Noetherschen Normierungssatz so wählen, daß y ganz ist über $k[x]$[5]). Beachtet man, daß der Ring $k[x]$ ein Hauptidealring ist, so sieht man, daß sich die in Satz 1 angegebene Voraussetzung der Voraussetzung des folgenden Satzes unterordnet:

SATZ 2. *Es sei R ein beliebiger Integritätsbereich, der über einem Hauptidealring R_0 durch ein R_0-ganzes Element y erzeugt wird. Dann gilt für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$ die Formel* (3).

Wir werden im folgenden den Satz 2 beweisen.

Der Satz 2 ist insbesondere für Zahlringe anwendbar, die aus dem Ring der ganzen rationalen Zahlen durch Adjunktion eines ganzen Elementes entstehen. Dieser Fall wurde bei GORENSTEIN ausdrücklich erwähnt und dort mitbehandelt. Es scheint jedoch in Vergessenheit geraten zu sein, daß der Satz 2 im Falle von Zahlringen schon seit langem bekannt ist: Er steht schon bei DEDEKIND[6]). In der Tat verläuft unser Beweis ganz wie der Dedekindsche Beweis; die einzige Schwierigkeit besteht darin, daß hier die Separabilität von R über R_0 nicht vorausgesetzt wird und daher die gewöhnliche Spurfunktion nicht zu gebrauchen ist. Man kommt jedoch mit Hilfe einer anderen, von der Erzeugenden y abhängigen „verallgemeinerten Spurfunktion" stets zum Ziel. Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis hier auch in den Einzelheiten durch, obwohl ein Hinweis auf DEDEKIND genügt hätte, sobald nur die verallgemeinerte Spurfunktion angegeben ist. So mag diese

[5]) Das läßt sich etwa folgendermaßen verifizieren: Sind x, y beliebige Erzeugende von R über k, so ersetze man x durch $x + y^m$ mit $m > 0$. Dann sind auch $x + y^m$, y Erzeugende von R über k. Wenn y nicht ganz ist über $x + y^m$, so gibt es eine Bewertung w von K über k mit $w(x + y^m) \geqq 0$, $w(y) < 0$. Es folgt $w(x) = w((x + y^m) - y^m) = m\, w(y) < 0$. Also ist w ein Pol von x und m ein Teiler der Ordnung dieses Poles. Wählt man daher m größer als die Ordnungen der endlich vielen Pole von x, so folgt, daß y ganz ist über $x + y^m$.

[6]) DEDEKIND, R.: Über die Diskriminanten endlicher Körper. Abhandl. der Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **29** (1882) = Gesammelte mathematische Werke Bd. I, Nr. XIX; insbes. S. 380.

Note gleichzeitig dem Gedächtnis an den großen Klassiker der Zahlentheorie gewidmet sein.

Zur Abrundung unserer Ergebnisse betrachten wir in Abschnitt 4 den Übergang von einem Ring R zu einem Quotientenring von R. Wir zeigen, daß sich die Gültigkeit der Formel (3) dabei vererbt. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von (3) für jeden lokalen Quotientenring von R die Gültigkeit für R selbst.

Ist R lokal mit der kompletten Hülle $\hat{R}$, so zeigen wir in Abschnitt 5, daß sich die Gültigkeit von (3) für $\hat{R}$ auf den Ring R vererbt. Andererseits läßt sich für einen *kompletten* lokalen Ring, dessen maximales Ideal von zwei Elementen erzeugbar ist, zeigen, daß er die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt. Wir gelangen so zu dem folgenden Satz, der als Gegenstück zu dem Satz 1 gelten kann[7]):

Satz 3. *Es sei R ein eindimensionaler lokaler Integritätsbereich, dessen maximales Ideal $\mathfrak{P}=Rx+Ry$ durch zwei Elemente x, y erzeugbar ist. Vorausgesetzt wird, daß die Charakteristik von R gleich der Charakteristik p des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{P}$ ist, oder im charakteristikungleichen Falle, daß R unverzweigt ist* (d.h. $p \notin \mathfrak{P}^2$). *Dann gilt für beliebige R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$ die Formel* (3).

Es sei bemerkt, daß dieser Satz das Ergebnis von Kodaira[8]) enthält, der den Satz von Gorenstein für gewisse Ringe analytischer Funktionen bewiesen hat.

Bemerkung. Um den Satz 3 beweisen zu können, benötigt man den Satz 2 nicht nur in der angegebenen Fassung für Integritätsbereiche, sondern auch für Nullteilerringe. Denn beim Übergang von einem lokalen Ring zu seiner kompletten Hülle können Nullteiler auftreten, selbst wenn der ursprüngliche Ring nullteilerfrei ist. Die Einbeziehung der Nullteiler macht jedoch keine wesentlichen Schwierigkeiten. Statt des Quotientenkörpers von R hat man den vollen Quotientenring von R zu betrachten; dieser wird ebenfalls mit K bezeichnet. Statt der in Satz 2 und 3 angegebenen Voraussetzung $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$ hat man vorauszusetzen, daß $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht aus lauter Nullteilern bestehen. Wir sprechen dann von Nichtnullteileridealen.

Es gelten dann die

Zusätze für Nullteilerringe:

Zu Satz 2. *Der Satz 2 gilt auch für einen Ring R mit Nullteilern, vorausgesetzt, daß R_0 keine Nullteiler von R enthält.*

---

[7]) Gorenstein[1]) beweist seinen Satz zuerst für die kompletten Hüllen der lokalen Quotientenringe von $R=k[x, y]$, schließt dann auf die Quotientenringe und von da auf den Ring R selbst zurück. Dieser Schluß vom „Lokalen" auf das „Globale" gibt jedoch für uns keine Beweisvereinfachung, obwohl er nach Satz 3 auch angewendet werden kann.

[8]) Kodaira, On compact complex analytic surfaces I. Lecture Notes Princeton University 1955. Das Studium des Kodairaschen Beweises und seiner Verwandtschaft mit den Methoden der Dedekindschen Differententheorie bildete den Ausgangspunkt unserer Überlegungen, die anläßlich der Kodairaschen Vorlesung im Jahre 1955 durchgeführt wurden.

ZU SATZ 3. *Auch der Satz 3 gilt für Nullteilerringe, vorausgesetzt, daß das maximale Ideal $\mathfrak{P}$ von R nicht aus lauter Nullteilern besteht. Im charakteristikungleichen Falle ist zusätzlich vorauszusetzen, daß die Charakteristik p von $R/\mathfrak{P}$ kein Nullteiler in R ist.*

Um nun unsere folgenden Überlegungen nicht von vorneherein mit der Diskussion von Nullteilern, die unwesentlich ist, zu belasten, führen wir unsere Beweise zunächst für den Fall von Integritätsbereichen durch. Am Schluß eines jeden Abschnitts findet sich dann jeweils ein „Zusatz für Nullteilerringe", in dem diejenigen zusätzlichen Überlegungen mitgeteilt sind, die beim Auftreten von Nullteilern erforderlich sind.

2. Der Reziprozitätssatz

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Noetherschen Integritätsbereich R der Dimension 1. Diese Dimension ist im idealtheoretischen Sinne zu verstehen; die Voraussetzung der Dimension 1 besagt also, daß jedes Primideal $\mathfrak{P} \neq 0$ von R *maximal* ist. Bekanntlich gilt dann in jedem Restklassenring $R/\mathfrak{N}$ nach einem Ideal $\mathfrak{N} \neq 0$ aus R die Minimalbedingung für Ideale[9]).

Es sei K der Quotientenkörper von R. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ usw. stets von 0 verschiedene R-Ideale aus K. Ist $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, so gibt es ein Element $u \neq 0$ aus R mit $u \cdot \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$; folglich besitzt der Modul $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ einen Annulator $\mathfrak{N} \neq 0$ und ist daher als endlicher $R/\mathfrak{N}$-Modul von endlicher Länge. Insbesondere ist die Aussage

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \sim \frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}} \qquad (\text{falls } \mathfrak{A} > \mathfrak{B}) \tag{3}$$

im Sinne des in Abschnitt 1 definierten Äquivalenzbegriffes sinnvoll. Daneben betrachten wir die Aussage:

$$\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} = \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Die Formel (4) werde „Reziprozitätsformel" genannt. Es gilt der folgende „Reziprozitätssatz":

SATZ 4. *Die Gültigkeit der Aussage* (3) *für alle R-Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq 0$ ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit von* (4) *für alle R-Ideale $\mathfrak{A} \neq 0$.*

BEWEIS. (4) $\Rightarrow$ (3): Die Reziprozitätsformel (4) besagt, daß die Abbildung $\mathfrak{A} \to \frac{R}{\mathfrak{A}}$ umkehrbar eindeutig ist, und daß jedes Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ als Bild auftritt. Dabei wird offenbar die Inklusionsrelation umgekehrt. Folglich entspricht einer R-Kompositionsreihe

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 > \mathfrak{A}_1 > \cdots > \mathfrak{A}_s = \mathfrak{B}$$

von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ eine R-Kompositionsreihe

$$\frac{R}{\mathfrak{A}} = \frac{R}{\mathfrak{A}_0} < \frac{R}{\mathfrak{A}_1} < \cdots < \frac{R}{\mathfrak{A}_s} = \frac{R}{\mathfrak{B}}$$

[9]) KRULL, W.: Idealtheorie. Ergebnisse d. Math. Bd. 4, H. 3. Berlin 1935; insbes. § 2, 10.

von $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ nach $\frac{R}{\mathfrak{B}}$. Demnach darf zum Beweis von (3) angenommen werden, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ als R-Modul *einfach* ist; dann ist auch $\frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}}$ einfach. Als einfacher R-Modul ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ isomorph zum Restklassenkörper $R/\mathfrak{P}$ nach einem eindeutig bestimmten maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ von R und ist daher durch seinen Annulator $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. Entsprechend ist $\frac{R}{\mathfrak{B}} \Big/ \frac{R}{\mathfrak{A}}$ durch seinen Annulator $\mathfrak{Q}$ bestimmt. Zu zeigen: $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$. Dazu genügt es zu zeigen: $\mathfrak{P}<\mathfrak{Q}$. In der Tat: Wegen $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{A}<\mathfrak{B}$ gilt

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{R}{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{A}<\frac{R}{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{B}<R,$$

also

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{R}{\mathfrak{B}}<\frac{R}{\mathfrak{A}}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Zur Abkürzung bezeichnen wir den in (4) links stehenden Modul mit $\mathfrak{A}^*$. Es ist $\mathfrak{A}^*>\mathfrak{A}$. Nach (3) folgt, daß

$$\mathfrak{A}^*/\mathfrak{A}\sim\frac{R}{\mathfrak{A}}\Big/\frac{R}{\mathfrak{A}^*}.$$

Nun gilt offenbar $\frac{R}{\mathfrak{A}}=\frac{R}{\mathfrak{A}^*}$ wegen

$$\frac{R}{\mathfrak{A}}\cdot\mathfrak{A}^*=\frac{R}{\mathfrak{A}}\cdot\frac{R}{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}<R.$$

Daher gilt auch $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}$, was zu zeigen war.

Zusatz für Nullteilerringe. Wenn R Nullteiler besitzt, so ist die Voraussetzung der Eindimensionalität von R folgendermaßen zu formulieren: Jedes nichtminimale Primideal von R ist maximal. Dann gilt in jedem Restklassenring $R/\mathfrak{N}$ nach einem Nichtnullteilerideal $\mathfrak{N}$ von R die Minimalbedingung. Hieraus folgt: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Nichtnullteilerideale aus dem vollen Quotientenring K von R, und ist $\mathfrak{A}>\mathfrak{B}$, so besitzt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ endliche Länge.

Der Beweis von Satz 4 verläuft wörtlich genau so auch für einen Nullteilerring, wenn man sich auf die Betrachtung von Nichtnullteilerideale beschränkt.

3. Beweis von Satz 2

(a) Wenn R über einem Hauptidealring R_0 endlich ist, so ist R Noethersch und besitzt die Dimension 1. Folglich kann der Reziprozitätssatz aus Abschnitt 2 angewandt werden. Demnach genügt es zu zeigen, daß für die R-Ideale $\mathfrak{A}\neq 0$ die Reziprozitätsformel (4) gilt. Dazu werden wir zeigen, daß $\frac{R}{\mathfrak{A}}$ als „Komplementärmodul" $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ in bezug auf eine gewisse lineare Funktion η aufgefaßt werden kann.

(b) Sei $f(Y)$ das Polynom kleinsten Grades über R_0 mit höchstem Koeffizienten 1, das y als Nullstelle besitzt. Ist n der Grad von $f(Y)$, so bilden $1, y, \ldots, y^{n-1}$ eine Basis von R über R_0, d.h. wir haben die direkte Modulzerlegung

$$R=R_0+R_0\,y+\cdots+R_0\,y^{n-1} \tag{5}$$

über R_0. Für die Quotientenkörper K, K_0 von R, R_0 bedeutet das die direkte Zerlegung

$$K = K_0 + K_0 y + \cdots + K_0 y^{n-1}. \tag{6}$$

Also läßt sich jedes Element $a \in K$ eindeutig in der Form darstellen:

$$a = a_0 + a_1 y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} \qquad (\text{mit } a_i \in K_0). \tag{7}$$

Wir setzen:

$$\eta(a) = a_{n-1}.$$

Die so bestimmte K_0-lineare Funktion $\eta\colon K \to K_0$ wird uns einen Ersatz bieten für die gewöhnlich in der Differententheorie verwendete Spurfunktion[10]).

Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine K_0-Basis von K. Da $\eta \neq 0$, so ist die Diskriminante

$$\det \eta(u_i u_j) \neq 0. \tag{8}$$

Folglich besitzt jedes Gleichungssystem der Form

$$\eta(u_i z) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

in denen die b_i vorgegebene Elemente aus K_0 bedeuten, eine *eindeutige* Lösung $z \in K$. Insbesondere gibt es eindeutig bestimmte Elemente $v_1, \ldots, v_n \in K$, für die

$$\eta(u_i v_j) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq j \\ 1, & \text{wenn } i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Die $v_1, \ldots, v_n$ sind nach (9) linear unabhängig über K_0, bilden also eine K_0-Basis von K: die zu $u_1, \ldots, u_n$ gehörige „*Komplementärbasis*".

(c) Es sei $\mathfrak{A} \neq 0$ ein endliches R-Ideal aus K. Dann ist $\mathfrak{A}$ als R_0-Modul endlich (nach (5)) und enthält n linear unabhängige Elemente. Folglich besitzt $\mathfrak{A}$ eine R_0-Basis aus n Elementen (denn R_0 ist Hauptidealring):

$$\mathfrak{A} = R_0 u_1 + \cdots + R_0 u_n.$$

Wir definieren nach DEDEKIND den „*Komplementärmodul*" $\mathfrak{A}'$ als den R_0-Modul mit der zu $u_1, \ldots, u_n$ komplementären Basis:

$$\mathfrak{A}' = R_0 v_1 + \cdots + R_0 v_n.$$

Es ist klar, daß $\mathfrak{A}'$ unabhängig von der Wahl der Basis $u_1, \ldots, u_n$ ist; dies folgt übrigens auch aus der unten angegebenen Charakterisierung (12) von $\mathfrak{A}'$. Weiter ist klar, daß

$$(\mathfrak{A}')' = \mathfrak{A},$$

denn die Beziehung einer Basis zu ihrer Komplementärbasis ist nach (9) symmetrisch. Demnach ergibt sich die zu beweisende Reziprozitätsformel (3), sobald wir gezeigt haben, daß

$$\mathfrak{A}' = \frac{R}{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

[10]) Falls K/K_0 separabel ist, so ist $f'(y) \neq 0$, und es gilt die bekannte, aus der Lagrangeschen Interpolationsformel abzuleitende Beziehung: $\eta(a) = \mathrm{Spur}_{K/K_0}\left(\frac{a}{f'(y)}\right)$.

Dies soll im folgenden bewiesen werden. Dabei werden wir nicht explizit die obige Definition von $\mathfrak{A}'$ mit Hilfe von Komplementärbasen verwenden, sondern die folgende Kennzeichnung, die sich unmittelbar aus den Relationen (9) ergibt:

(11) *$\mathfrak{A}'$ besteht aus genau denjenigen Elementen $b \in K$, für welche $\eta(b \cdot \mathfrak{A}) < R_0$.*

(d) Beweis von (10). Zunächst folgt nach (5):

$$\eta(R) = R_0. \tag{12}$$

Hieraus folgt weiter: $\eta\left(\frac{R}{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}\right) < \eta(R) = R_0$, also nach (11):

$$\frac{R}{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}'.$$

Es bleibt die andere Inklusionsrichtung nachzuweisen, d.h.: aus $b \notin \frac{R}{\mathfrak{A}}$ folgt $b \notin \mathfrak{A}'$. Es gibt ein Element $c \in \mathfrak{A}$ derart, daß $a = bc \notin R$. Wir zeigen, daß $\eta(a \cdot R) \not< R_0$.

Wir denken uns a in der Form (7) gegeben. Wegen $a \notin R$ liegen nicht alle Koeffizienten in R_0; es sei a_i der letzte nicht in R_0 gelegene Koeffizient. Wir schreiben:

$$a = (a_0 + a_1 y + \cdots + a_i y^i) + z \qquad \text{mit } z \in R.$$

Dann gilt unter Berücksichtigung von (12):

$$\eta(a \cdot y^{n-1-i}) = a_i + \eta(z \cdot y^{n-1-i}) \equiv a_i \not\equiv 0 \bmod R_0,$$

also in der Tat $\eta(a \cdot R) \not< R_0$.

Das war zu zeigen.

Zusatz für Nullteilerringe. Daß die Summendarstellung (5) *direkt* ist, wird durch die Voraussetzung garantiert, daß R_0 keine Nullteiler von R enthält. Aus dieser Voraussetzung folgt auch, daß der Quotientenkörper K_0 von R_0 im vollen Quotientenring K von R enthalten ist. Daher ist (6) eine Folge aus (5).

Daß die Diskriminante (8) nicht verschwindet, kann jetzt nicht allein daraus gefolgert werden, daß $\eta \neq 0$. Vielmehr kann man etwa die Diskriminante *einer* speziellen Basis von K über K_0 ausrechnen und nachprüfen, daß sie $\neq 0$ (z.B. bei der Basis $1, y, \ldots, y^{n-1}$). Man kann aber auch direkt so vorgehen: Wenn die Diskriminante (8) verschwindet, so ist das homogene Gleichungssystem

$$\eta(u_i a) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

durch ein Element $a \neq 0$ aus K lösbar. Für dieses a wäre $\eta(K \cdot a) = 0$. Ist a_i der letzte nicht verschwindende Koeffizient der Darstellung (7), so ergibt sich jedoch:

$$\eta(y^{n-1-i} a) = a_i \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist.

In (c) hat man sich auf Nichtnullteilerideale zu beschränken; für diese gilt die Aussage, daß sie n linear unabhängige Elemente über R_0 enthalten.

4. Quotientenringe

Wie in Abschnitt 2 sei R ein Noetherscher Integritätsbereich der Dimension 1. Es sei M eine Halbgruppe aus R, welche 0 nicht enthält, und es sei R_M der zugehörige Quotientenring. Falls M aus den nicht in einem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ gelegenen Elementen von R besteht, so schreiben wir wie üblich $R_\mathfrak{P}$ statt R_M.

Wir sagen, daß für R die Reziprozitätsformel gilt, wenn für jedes R-Ideal $\mathfrak{A} \neq 0$ aus K die Formel (4) gilt — oder, was nach Abschnitt 2 dasselbe bedeutet, wenn für je zwei R-Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq 0$ aus K die Formel (3) gilt.

LEMMA 1. *Wenn für R die Reziprozitätsformel gilt, so gilt sie auch für jeden Quotientenring R_M.*

Umgekehrt: Wenn für jeden lokalen Quotientenring $R_\mathfrak{P}$ nach einem maximalen Ideal $\mathfrak{P} < R$ die Reziprozitätsformel gilt, so gilt sie auch für R.

BEWEIS. Jedes R-Ideal $\mathfrak{A}$ erzeugt ein R_M-Ideal $\mathfrak{A}_M = R_M \cdot \mathfrak{A}$. Dabei läßt sich *jedes* R_M-Ideal $\mathfrak{B}$ durch ein R-Ideal $\mathfrak{A}$ erzeugen: Ist nämlich $\mathfrak{B} = R_M u_1 + \cdots + R_M u_s$, so kann man $\mathfrak{A} = Ru_1 + \cdots + Ru_s$ setzen; dann wird $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_M$.

Um daher aus der Reziprozitätsformel für R die Reziprozitätsformel für R_M herzuleiten, ist nur noch die Formel

$$\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M = \frac{R_M}{\mathfrak{A}_M} \tag{13}$$

zu verifizieren. Zunächst gilt:

$$\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M \cdot \mathfrak{A}_M = R_M \cdot \left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right) \cdot \mathfrak{A} < R_M \cdot R = R_M,$$

also gilt in (13) jedenfalls das $<$ Zeichen. Um die Umkehrung zu beweisen, sei $b \in \frac{R_M}{\mathfrak{A}_M}$, also $b \cdot \mathfrak{A}_M < R_M$. Dann gilt für jedes Element $a \in \mathfrak{A}$ eine Relation der Form $b \cdot a = \frac{u}{m}$ mit $u \in R$ und $m \in M$. Schreibt man diese Relation für die Elemente a_i eines endlichen Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}$ hin, und multipliziert die auftretenden Nenner m_i, und nennt das Produkt wieder m, so folgt: $b \cdot \mathfrak{A} < \frac{R}{m}$, also $m \cdot b \in \frac{R}{\mathfrak{A}}$, $b \in \left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)_M$.

Damit ist der erste Teil von Lemma 1 bewiesen. Um die Umkehrung zu zeigen, hat man angesichts der Formel (13) nur nachzuweisen, daß ein R-Ideal $\mathfrak{A}$ durch seine sämtlichen lokalen Komponenten $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ (wenn $\mathfrak{P}$ alle maximalen Ideale von R durchläuft) bestimmt ist:

$$\mathfrak{A} = \bigcap_\mathfrak{P} \mathfrak{A}_\mathfrak{P}. \tag{14}$$

Dazu sei $b \in K$ derart, daß $b \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P}$; wir haben zu zeigen, daß $b \in \mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{W}$ das Ideal derjenigen Elemente $w \in R$, für welche $wb \in \mathfrak{A}$; wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{W} = R$. Dazu genügt es, nachzuweisen, daß $\mathfrak{W}$ in keinem maximalen Ideal $\mathfrak{P}$ von R enthalten ist. In der Tat: wegen $b \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ gibt es eine Darstellung von b der Form $b = \frac{a}{w}$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $w \in R$, $w \notin \mathfrak{P}$.

Das war zu zeigen[11]).

Zusatz für Nullteilerringe. Wenn M Nullteiler enthält, so ist die natürliche Abbildung $\varphi_M: R \to R_M$ nicht monomorph, also kann dann R_M nicht mehr als R umfassender Teilring von K angesehen werden. Jedenfalls kann die Abbildung φ_M in eindeutiger Weise als Abbildung des vollen Quotientenringes K von R in den vollen Quotientenring K_M von R_M fortgesetzt werden, wie das folgende Ergebnis zeigt:

(15) *Ist a Nichtnullteiler von R, so ist $\varphi_M(a)$ Nichtnullteiler von R_M.*

Denn aus $\varphi_M(a)\,\varphi_M(b) = \varphi_M(ab) = 0$ folgt, daß ab im Kern $\mathfrak{N}_M$ von φ_M enthalten ist. $\mathfrak{N}_M$ besteht aus denjenigen Elementen aus R, welche sich durch ein Element aus M annullieren lassen. Also gibt es ein $m \in M$ mit $abm = 0$. Es folgt $bm = 0$, also $\varphi_M(b)\,\varphi_M(m) = 0$, also $\varphi_M(b) = 0$, da $\varphi_M(m)$ Einheit in R_M ist.

Wir bezeichnen die eindeutige Fortsetzung von φ_M auf K ebenfalls mit φ_M. Ist φ_M epimorph, d.h. gilt $\varphi_M(K) = K_M$? Dies kann man nur unter einer Zusatzvoraussetzung schließen:

Im folgenden sei zusätzlich vorausgesetzt, daß das Nullideal von R keine eingebetteten Komponenten besitzt, d.h. daß die Nullteilerprimideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von R sämtlich minimale Primideale sind.

Dann gilt:

(16) *Ist $\varphi_M(a)$ Nichtnullteiler in $\varphi_M(R)$, so kann das Urbild a als Nichtnullteiler aus R gewählt werden.*

Dazu sei a zunächst ein beliebiges Urbild. Man hat dann $u \in \mathfrak{N}_M$ so zu bestimmen, daß $a + u$ kein Nullteiler ist, d.h. $a + u \notin \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, s$. Dazu genügt es, u so zu bestimmen, daß

$$(17) \qquad \left.\begin{array}{l} u \notin \mathfrak{p}_i, \text{ wenn } a \in \mathfrak{p}_i \\ u \in \mathfrak{p}_i, \text{ wenn } a \notin \mathfrak{p}_i \end{array}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

Da nach der angegebenen Zusatzvoraussetzung $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$, so lassen sich diese Bedingungen (17) jedenfalls durch ein Element u aus R erfüllen. Mit u ist auch jede Potenz von u Lösung von (17). Wir behaupten, daß eine geeignete Potenz von u in $\mathfrak{N}_M$ liegt, d.h. daß jede Lösung von (17) im Radikal von $\mathfrak{N}_M$ liegt. Das Radikal von $\mathfrak{N}_M$ ist gleich dem Durchschnitt derjenigen $\mathfrak{p}_i$, die zu M disjunkt sind[11]). Für jedes dieser $\mathfrak{p}_i$ ist $\varphi_M(\mathfrak{p}_i)$ ein minimales Primideal aus $\varphi_M(R)$ und daher $\varphi_M(a) \notin \varphi_M(\mathfrak{p}_i)$, $a \notin \mathfrak{p}_i$, $u \in \mathfrak{p}_i$. Das war zu zeigen.

Aus (16) folgt, daß φ_M eine Abbildung von K auf den vollen Quotientenring K_M von R_M vermittelt.

Nun verläuft der Beweis von Lemma 1 ganz entsprechend wie oben: Man hat jetzt $\mathfrak{A}_M = R_M \cdot \varphi_M(\mathfrak{A})$ zu setzen. Ist $\mathfrak{A}$ Nichtnullteilerideal, so ist auch

[11]) Übrigens sind die Formeln (13), (14) aus der Grellschen Theorie der Quotientenringe wohlbekannt; vgl. dazu etwa Zariski-Samuel: Commutative Algebra I, Ch. IV, § 10. New York 1958.

$\mathfrak{A}_M$ Nichtnullteilerideal (nach (15)). Umgekehrt: jedes Nichtnullteilerideal aus K_M wird durch ein Nichtnullteilerideal aus K erzeugt (nach (16)). — Die Formel (13) wird genau so wie oben bewiesen, nur daß an geeigneten Stellen die Abbildung φ_M einzuschalten ist. — In Formel (14) ist das rechtsstehende Durchschnittsideal zu ersetzen durch das Ideal $\mathfrak{B}$ derjenigen $b \in K$, für welche $\varphi_{\mathfrak{P}}(b) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ für alle $\mathfrak{P}$.

5. Lokale Ringe. (Beweis von Satz 3)

a) Komplette[12]) lokale Ringe

LEMMA 2. *Es sei R komplett. Falls R die in Satz 3 angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann R über einem Hauptidealring R_0 durch ein einziges R_0-ganzes Element y erzeugt werden.*

Insbesondere folgt nach Satz 2, daß für R die Reziprozitätsformel gilt.

BEWEIS. Zunächst behandeln wir den charakteristikgleichen Fall. Wir benutzen den Satz von COHEN[13]), demzufolge in R ein Vertreterkörper k des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{P}$ existiert. Wir wählen ein Element $x \in \mathfrak{P}$, $x \notin \mathfrak{P}^2$ und bilden in R den Potenzreihenring

$$R_0 = k[[x]].$$

Da keine Potenz von x verschwindet, so ist dies der *freie* Potenzreihenring in x über k. Insbesondere ist R_0 ein diskreter Bewertungsring und als solcher ein Hauptidealring.

Nach Voraussetzung läßt sich $\mathfrak{P}$ durch x und ein weiteres Element y erzeugen. Es gilt $y^n \in Rx$ für hinreichend großes n, denn Rx ist Primärideal zu $\mathfrak{P}$ und daher $\mathfrak{P}^n \subset Rx$ für hinreichend großes n. Wir denken uns n fest gewählt und setzen:

$$Z = k + k\,y + \cdots + k\,y^{n-1}.$$

Dann ist Z ein Vertretersystem für R modulo Rx, denn die Polynome in x, y vom Grade $\leqq n-1$ mit Koeffizienten aus k bilden ein Vertretersystem für R modulo $\mathfrak{P}^n$. Durch Induktion ergibt sich weiter, daß für jedes m die Menge

$$Z_m = Z + Z\,x + \cdots + Z\,x^{m-1}$$

ein Vertretersystem für R/Rx^m bildet. Da R komplett ist, erhalten wir beim Übergang $m \to \infty$:

$$R = \sum_{\mu=0}^{\infty} Z\,x^{\mu} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} k\,x^{\mu}\,y^{i} = \sum_{i=0}^{n-1} R_0\,y^{i},$$

[12]) Die Bezeichnung „komplett" bezieht sich auf die durch die Potenzen des maximalen Ideals definierte Topologie und besagt, daß jede Cauchy-Folge konvergiert. Andere gebräuchliche Bezeichnungen: „perfekt", „vollständig".

[13]) COHEN, I. S.: On the structure and ideal theory of complete local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 54—106 (1946). Siehe auch: ROQUETTE, P.: Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen. Abhandl. Math. Seminar Hamburg **23**, 79—113 (1959).

wobei unendliche Summen im Sinne der Konvergenz in R zu verstehen sind. Daher ist R über R_0 endlich und wird durch y erzeugt.

Im charakteristikungleichen Falle sind diese Überlegungen folgendermaßen zu modifizieren: Für R_0 wählen wir einen diskreten Bewertungsring aus R, der denselben Restklassenkörper wie R besitzt, und dessen maximales Ideal durch p erzeugt wird. Die Existenz eines solchen Ringes wird uns ebenfalls durch den Cohenschen Satz gegeben[13]). Für k wählen wir irgendein Vertretersystem von $R/\mathfrak{P}=R_0/R_0p$ aus R_0. Dann ist also:

$$R_0=\sum_{\mu=0}^{\infty} k\,p^{\mu}.$$

Da nach Voraussetzung $p\notin\mathfrak{P}^2$, so läßt sich p durch Hinzunahme eines Elementes y zu einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{P}$ ergänzen. Wir schließen dann genau so wie oben, wobei nur x durch p zu ersetzen ist[14]).

Zusatz für Nullteilerringe. Besitzt R Nullteiler, so sind die im Zusatz zu Satz 3 in Abschnitt 1 angegebenen Bedingungen zu stellen.

Das Element $x\in\mathfrak{P}$, $x\notin\mathfrak{P}^2$, das im charakteristikgleichen Falle zur Konstruktion von R_0 dient, ist nunmehr als Nichtnullteiler zu wählen. Daß dies möglich ist, ergibt sich aus:

(18) *Zu $x\in\mathfrak{P}$ gibt es $u\in\mathfrak{P}^2$ derart, daß $x+u$ kein Nullteiler in R ist.*

Bedeuten $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s$ wie in Abschnitt 4 die zu 0 gehörigen Primideale, so soll $x+u\notin\mathfrak{p}_i$ (für $i=1,\ldots,s$) sein. Dazu genügt es, u so zu bestimmen, daß

$$\left.\begin{array}{l} u\notin\mathfrak{p}_i, \text{ wenn } x\in\mathfrak{p}_i \\ u\in\mathfrak{p}_i, \text{ wenn } x\notin\mathfrak{p}_i \end{array}\right\} \qquad (i=1,\ldots,s). \tag{19}$$

Hierbei ist nun $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{p}_i$, denn $\mathfrak{P}$ besteht nicht aus lauter Nullteilern (nach Voraussetzung). Daher sind die $\mathfrak{p}_i$ sämtlich minimale Primideale von R. Also $\mathfrak{p}_i\not\subset\mathfrak{p}_j$ für $i\neq j$. Daher lassen sich diese Bedingungen (19) jedenfalls durch ein Element $u\in R$ erfüllen. Falls $x\notin\mathfrak{p}_i$ für mindestens ein i, so ist $u\in\mathfrak{p}_i$, $u\in\mathfrak{P}$. Falls $x\in\mathfrak{p}_i$ für alle i, so besagt die Bedingung (19), daß $u\notin\mathfrak{p}_i$ für alle i, d.h. daß u kein Nullteiler ist. Da $\mathfrak{P}$ nicht aus lauter Nullteilern besteht, so kann daher u als Nichtnullteiler in $\mathfrak{P}$ gewählt werden. — In jedem Falle finden wir eine Lösung u von (19), welche in $\mathfrak{P}$ enthalten ist. Nach Ersetzung von u durch u^2 erhalten wir dann eine in $\mathfrak{P}^2$ enthaltene Lösung von (19), wie sie gesucht wurde.

Denken wir uns demgemäß x als Nichtnullteiler gewählt, so ist das Ideal Rx primär für $\mathfrak{P}$ und daher $\mathfrak{P}^n\subset Rx$ für geeignetes n. Der weitere Beweis wird dann genau so wie oben geführt. Nach der Wahl von x besitzt der Ring $R_0=k[[x]]$ keine Nullteiler von R, so daß auch die in Satz 2 für Nullteilerringe angegebene Zusatzvoraussetzung erfüllt ist.

Im charakteristikungleichen Falle hat man wieder x durch p zu ersetzen. Daß p kein Nullteiler ist, wurde im Zusatz zu Satz 3 vorausgesetzt.

[14]) Lemma 2 findet sich im wesentlichen auch bei Cohen[13]), S. 90, Theorem 16.

b) Beliebige lokale Ringe

Es sei R ein eindimensionaler lokaler Ring, und $\hat{R}$ seine komplette Hülle. Wir lassen diesmal gleich zu, daß R (und $\hat{R}$) Nullteiler besitzen.

LEMMA 3. *Falls die Reziprozitätsformel für $\hat{R}$ gilt, so gilt sie auch für R.*

BEWEIS. In diesem Beweis benutzen wir eine Reihe von bekannten Sätzen über das Verhalten von R und von endlichen R-Moduln beim Übergang zur kompletten Hülle. Hierfür sei etwa auf die Darstellung in ZARISKI-SAMUEL verwiesen[15]).

Ein Nichtnullteiler aus R ist auch ein Nichtnullteiler in $\hat{R}$. Folglich ist der volle Quotientenring K von R im vollen Quotientenring $\hat{K}$ von $\hat{R}$ enthalten. Jedes R-Ideal $\mathfrak{A}$ aus K erzeugt ein $\hat{R}$-Ideal $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{R} \cdot \mathfrak{A}$ aus $\hat{K}$, das als komplette Hülle von $\mathfrak{A}$ aufgefaßt werden kann. Dabei gilt

$$\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}} \cap K.$$

Ist $\mathfrak{A}$ Nichtnullteilerideal, so ist es auch $\hat{\mathfrak{A}}$.

Um daher aus der Reziprozitätsformel für $\hat{R}$ die Reziprozitätsformel für R herzuleiten, ist nur noch die Formel

$$\widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} = \frac{\hat{R}}{\hat{\mathfrak{A}}} \tag{20}$$

für Nichtnullteilerideale zu verifizieren. Zunächst gilt:

$$\widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)} \cdot \hat{\mathfrak{A}} = \hat{R} \cdot \left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right) \cdot \mathfrak{A} < \hat{R} \cdot R = \hat{R},$$

also gilt in (20) jedenfalls das $<$ Zeichen. Um die Umkehrung zu beweisen, sei $b \in \frac{\hat{R}}{\hat{\mathfrak{A}}}$, also $b \cdot \hat{\mathfrak{A}} < \hat{R}$. Es sei $b = \lim\limits_{\mu \to \infty} b_\mu$ mit $b_\mu \in K$. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ gilt dann $\lim\limits_{\mu \to \infty} (b_\mu a) = ba \in \hat{R}$. Für hinreichend großes $\mu > \mathsf{M}$ ist $(b_\mu a) - (ba) \in \hat{\mathfrak{P}}$, also $b_\mu a \in \hat{R}$, also $b_\mu a \in R$. Läßt man hierbei a die Elemente a_i eines endlichen Erzeugendensystems von $\mathfrak{A}$ durchlaufen und nimmt das Maximum der entstehenden Schranken M_i, und nennt dieses Maximum wieder M, so folgt: $b_\mu \cdot \mathfrak{A} < R$ für $\mu > \mathsf{M}$. Also $b_\mu \in \frac{R}{\mathfrak{A}}$ für $\mu > \mathsf{M}$, also $b = \lim\limits_{\mu \to \infty} b_\mu \in \widehat{\left(\frac{R}{\mathfrak{A}}\right)}$. Das war zu zeigen.

[15]) ZARISKI-SAMUEL[11]), Bd. II, Chap. VIII, § 4.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 17. Mai 1961)

Pickert, G.
Math. Zeitschr. 77, 241–248 (1961)

Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
Günter Pickert

Die Tatsache, daß die Addition einer negativen Zahl $-a$ als Subtraktion der positiven Zahl a aufgefaßt werden kann, legt es nahe, die ganzen Zahlen ausgehend von den Translationen in der Halbgruppe der natürlichen Zahlen zu gewinnen. Ein solches Verfahren wurde von Bourbaki [2] für die allgemeinere Aufgabe angegeben: Symmetrisierung einer Halbgruppe, deren reguläre Elemente im Zentrum liegen. Im folgenden soll dieses Verfahren unter schwächeren Voraussetzungen über die regulären Elemente untersucht werden. Diese neuen Voraussetzungen gehen im Fall einer regulären Halbgruppe in die bekannte hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung von Ore [4] für Einbettbarkeit in eine Gruppe über (s. **3**). In **2** wird das Verfahren auf gerichtete Halbgruppen angewandt. Der in **1** zur Definition einer Halbgruppe von Abbildungen verwandte Filter wird bei der Anwendung in **2** von den Endstücken der gerichteten Halbgruppe erzeugt. **4** stellt fest, was von dem in **1** Erreichten auf eine Halbgruppe von Relationen verallgemeinert werden kann.

1. In der nichtleeren Menge M sei ein Filter $\mathfrak{F}$ gegeben (d.h. eine nichtleere Menge von Mengen $\subseteq M$ mit den Eigenschaften: $\emptyset \notin \mathfrak{F}$; $F' \in \mathfrak{F}$, wenn $F' \supseteq F \in \mathfrak{F}$; $F \cap F' \in \mathfrak{F}$, wenn $F, F' \in \mathfrak{F}$). Es wird nun die Menge Φ derjenigen Abbildungen f aus M in M untersucht, für die gilt:

$$f^{-1}(F) \in \mathfrak{F}, \quad \text{wenn} \quad F \in \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet „aus M", daß der Definitionsbereich D_f von f Teilmenge von M ist, und es besteht für $X \subseteq M$ die Definitionsgleichung

$$f^{-1}(X) = \{x;\ x \in D_f,\ f(x) \in X\}. \tag{2}$$

Wegen $f^{-1}(X) \subseteq D_f$ folgt aus (1) insbesondere $D_f \in \mathfrak{F}$. Faßt man $\mathfrak{F}$ als den Filter der „punktierten" Umgebungen einer zu M adjungierten Stelle ∞ auf, so besagt (1) gerade die Stetigkeit von f an der Stelle ∞, wenn noch $f(\infty) = \infty$ festgesetzt wird. Die Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Abbildungen f, g aus M in M sei wie üblich folgendermaßen erklärt:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad \text{für} \quad x \in g^{-1}(D_f); \tag{3}$$

insbesondere ist also $D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f)$. Wegen der bekannten Assoziativität von $\circ$ und wegen der aus (2), (3) folgenden Gleichung

$$(f \circ g)^{-1}(X) = g^{-1}\big(f^{-1}(X)\big) \quad \text{für alle} \quad X \subseteq M$$

bildet daher Φ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe; diese werde einfachheitshalber wieder mit Φ bezeichnet. Die identische Abbildung i von M auf sich ist offenbar neutrales Element von Φ.

In Φ führt man nun eine Relation $\doteq$ durch die folgende Definition ein:

$$(4)\qquad \begin{cases} f \doteq g \text{ genau dann, wenn es } F \in \mathfrak{F} \text{ mit } F \subseteq D_f \cap D_g \\ \qquad \text{und } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in F \text{ gibt.} \end{cases}$$

Bei $\doteq$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation[1]; denn wegen $D_f \in \mathfrak{F}$ ist sie reflexiv, und die Komparativität folgt so: Gilt $f \doteq g$, $f \doteq h$, so hat man nach (4) und der entsprechenden Beziehung mit h, F' (statt g, F)

$$F \cap F' \subseteq D_g \cap D_h, \qquad g(x) = h(x) \quad \text{für} \quad x \in F \cap F',$$

wegen $F \cap F' \in \mathfrak{F}$ also $g \doteq h$.

Die Relation $\doteq$ ist ferner links- sowie rechtsverträglich mit $\circ$ und daher eine Kongruenzrelation der Halbgruppe Φ. Denn für $f, g, h \in \Phi$ folgt aus $f \doteq g$ nach (1), (3) und (4) einmal

$$(f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in h^{-1}(F) \quad (\in \mathfrak{F}),$$
$$h^{-1}(F) \subseteq h^{-1}(D_f \cap D_g) = D_{f \circ h} \cap D_{g \circ h},$$

also $f \circ h \doteq g \circ h$, und zum andern

$$(h \circ f)(x) = (h \circ g)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in F \cap f^{-1}(D_h) \quad (\in \mathfrak{F}),$$
$$F \cap f^{-1}(D_h) \subseteq f^{-1}(D_h) \cap g^{-1}(D_h) = D_{h \circ f} \cap D_{h \circ g},$$

also $h \circ f \doteq h \circ g$. Man kann daher die aus den Restklassen nach $\doteq$ bestehende Faktorhalbgruppe $\bar{\Phi} = \Phi / \doteq$ bilden; diese hat die Restklasse von i als neutrales Element.

Ist $f \in \Phi$ umkehrbar, so muß die Restklasse $\bar{f}$ $(\in \bar{\Phi})$ von f *linksregulär* sein; denn $f \circ g \doteq f \circ h$ besagt die Existenz von $F \in \mathfrak{F}$ mit $f(g(x)) = f(h(x))$ für alle $x \in F$, und daraus folgt wegen der Umkehrbarkeit von f die Gleichung $g(x) = h(x)$ für alle $x \in F$, d.h. aber $g \doteq h$. Bildet $f \in \Phi$ den Filter $\mathfrak{F}$ in sich ab, d.h. gilt $f(F) \in \mathfrak{F}$ für alle $F \in \mathfrak{F}$, so ist $\bar{f}$ *rechtsregulär*; denn $g \circ f \doteq h \circ f$ besagt die Existenz von $F \in \mathfrak{F}$ mit $g(f(x)) = h(f(x))$ für alle $x \in F$, und daraus ergibt sich wegen $F' = f(F) \in \mathfrak{F}$ die Gleichung $g(y) = h(y)$ für alle $y \in F'$, also $g \doteq h$. Die eben angegebenen hinreichenden Regularitätsbedingungen für $\bar{f}$ besagen zusammen gerade, daß f umkehrbar und die Umkehrabbildung f^{-1} Element von Φ ist. Dann gilt offenbar

$$f \circ f^{-1} \doteq i \doteq f^{-1} \circ f,$$

d.h. $\overline{f^{-1}}$ ist Inverses von $\bar{f}$. Man hat daher den

HIFSSATZ 1. *Es sei Φ' eine Unterhalbgruppe von Φ, für deren Elemente aus $f \doteq g$ stets $f = g$ folgt; dann läßt sich Φ' in eine Halbgruppe einbetten, in der*

[1] In anderem Zusammenhang und für den Fall, daß es sich um Abbildungen von M in eine beliebige Menge handelt, wird diese Äquivalenzrelation bei RIBENBOIM [5] eingeführt, ausgehend vom Antifilter $\{M - F;\ F \in \mathfrak{F}\}$.

jede umkehrbare Abbildung $f \in \Phi'$, für die f^{-1} in Φ liegt, ein Inverses besitzt.

Offenbar bilden die umkehrbaren $f \in \Phi$ mit $f^{-1} \in \Phi$ eine Unterhalbgruppe Φ_0 von Φ. Nach dem oben Festgestellten ist dann $\bar{\Phi}_0 = \Phi_0/\doteq$ sogar eine Gruppe, und man erhält so den

HILFSSATZ 2. *Eine Unterhalbgruppe von Φ_0, für deren Elemente aus $f \doteq g$ stets $f = g$ folgt, läßt sich in eine Gruppe einbetten.*

2. Die Halbgruppe H heiße *gerichtet*, wenn in der Menge ihrer Elemente eine binäre Relation $<$ mit den folgenden beiden Eigenschaften definiert ist:

(5) wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$;

(6) zu jedem Elementepaar a, b gibt es c mit $a < c$ und $b < c$.

Die *Linkstranslation* t_a der (additiv geschriebenen) Halbgruppe H wird durch

(7) $$t_a(x) = a + x \quad \text{für alle} \quad x \in H$$

definiert. t_a ist genau dann umkehrbar, wenn a linksregulär ist. Wie üblich heißt eine Abbildung f von H in sich *monoton wachsend* (bezgl. $<$), wenn aus $a < b$ stets $f(a) < f(b)$ folgt, und *unbeschränkt* (bezgl. $<$), wenn zu jedem b ein a mit $b < f(a)$ vorhanden ist. Mit diesem Begriffsbildungen gilt

SATZ 1. *In der gerichteten Halbgruppe H seien alle Linkstranslationen monoton wachsend sowie unbeschränkt, und zu jedem $a \in H$ gebe es ein rechtsreguläres $b \in H$ mit $a < b$. Dann läßt sich H in eine Halbgruppe H' einbetten, in der jedes linksreguläre Element a von H ein Inverses besitzt, sobald a die folgenden Bedingungen erfüllt*[2]*:*

(M_a) *t_a^{-1} ist monoton wachsend.*

(D_a) *Es gibt $a' \in H$, so daß für alle $x \in H$ aus $a' < x$ die Existenz eines $y \in H$ mit $a + y = x$ folgt.*

BEWEIS. H wird als die Menge M in **1** genommen und der Filter $\mathfrak{F}$ erzeugt durch die für alle $a \in H$ definierten *Endstücke*

(8) $$E_a = \{x;\ a < x \in H\}.$$

Daß die E_a eine Filterbasis bilden, geht sofort aus (5), (6) hervor. Daher besteht $\mathfrak{F}$ genau aus denjenigen Mengen $F \subseteq H$, zu denen es $a \in H$ mit $E_a \subseteq F$ gibt. Wegen (7), (8) besagt das monotone Wachsen von t_a, daß $t_a(c) \in E_{a+b}$ für alle $c \in E_b$ gilt. Man hat daher

(9) $$E_b \subseteq t_a^{-1}(E_{a+b}).$$

Wegen der Unbeschränktheit von t_a gibt es zu $c \in H$ stets ein $b \in H$ mit $c < a + b$. Daraus folgt nach (5), (8) sofort $E_{a+b} \subseteq E_c$ und weiter nach (9) $E_b \subseteq t_a^{-1}(E_c)$,

[2]) Zur Bezeichnung dieser Bedingungen sind die Buchstaben M und D gewählt, weil die erste die Monotonie von t_a^{-1} enthält und die zweite etwas über den Definitionsbereich von t_a^{-1} aussagt.

d.h. $t_a^{-1}(E_c) \in \mathfrak{F}$. Alle Linkstranslationen liegen daher in der nach **1** durch den Filter $\mathfrak{F}$ bestimmten Halbgruppe Φ und bilden natürlich in dieser eine Unterhalbgruppe Φ'. Ist a linksregulär, also t_a umkehrbar, so liefert (M_a) entsprechend zu (9) die Beziehung

$$t_a^{-1}(E_{a+b}) \subseteq E_b, \tag{10}$$

und aus (D_a) ergibt sich

$$E_{a'} \subseteq t_a(H). \tag{11}$$

Aus (10), (11) zusammen folgt $t_a(E_b) \supseteq E_{a+b} \cap E_{a'}$ also $t_a(E_b) \in \mathfrak{F}$ und damit $t_a^{-1} \in \Phi$. Schließlich erfüllt Φ' auch die in Hilfssatz 1 genannte Voraussetzung; denn gilt $t_a \doteq t_b$, also $a+x=b+x$ für alle $x \in E_c$ bei geeignetem c, so gibt es nach Voraussetzung ein rechtsreguläres $x \in E_c$, woraus $a=b$ und somit $t_a=t_b$ folgt. Da $a \to t_a$ zudem ein Isomorphismus von H auf Φ' ist, folgt die Behauptung von Satz 1 nach dem bis jetzt Bewiesenen unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Da die Invertierbarkeit bekanntlich die Regularität nach sich zieht, erhält man aus Satz 1 noch den folgenden

ZUSATZ. *Unter den in Satz 1 genannten Voraussetzungen über die Halbgruppe H ist jedes linksreguläre Element $a \in H$ mit (M_a), (D_a) auch rechtsregulär.*

Im Sonderfall einer *regulären* Halbgruppe H, d.h. einer solchen, deren Elemente sämtlich sowohl links- wie auch rechtsregulär sind, läßt sich Satz 1 durch ein schärferes Ergebnis ersetzen:

SATZ 2. *Eine gerichtete reguläre Halbgruppe H läßt sich in eine Gruppe einbetten, wenn alle Linkstranslationen sowie ihre Umkehrungen monoton wachsend sind und jedes $a \in H$ die Bedingung (D_a) erfüllt.*

BEWEIS. Aus den Voraussetzungen von Satz 2 folgen die von Satz 1. Um das zu erkennen, braucht man nur die Unbeschränktheit von t_a aus (D_a) herzuleiten: Nach (6) gibt es zu jedem $b \in H$ ein $x \in H$ mit $a' < x$, $b < x$ und nach (D_a) dann ein $y \in H$ mit $t_a(y) = x$, also $b < t_a(y)$. Nach dem im Beweis von Satz 1 Gezeigten ist die Halbgruppe Φ' der Linkstranslationen daher isomorph zu H und zugleich Unterhalbgruppe der in **1** erklärten Halbgruppe Φ_0. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Behauptung.

3. In einer (additiv geschriebenen) Halbgruppe H wird die binäre Relation $<$ folgendermaßen erklärt:

$$a < b \quad \textit{genau dann, wenn es } c \in H \textit{ mit } a + c = b \textit{ gibt.} \tag{12}$$

Für diese Relation ergibt sich (5) sofort aus dem Assoziativgesetz, während (6) offenbar gleichbedeutend ist mit der *Oreschen Bedingung: Zu $a, b \in H$ gibt es $c, d \in H$ mit $a+c=b+d$.* Aus dem Assoziativgesetz folgt mittels (12) leicht, daß alle Linkstranslationen t_a und bei linksregulärem a auch t_a^{-1} monoton wachsend sind. Mit $a'=a$ ist wegen (12) (D_a) für jedes $a \in H$ erfüllt. Daher liefert Satz 2 sofort das Ergebnis von ORE [4][3]:

[3]) Dort allerdings für die multiplikativen Halbgruppen von Ringen, jedoch ohne tatsächliches Benutzen dieser einschränkenden Voraussetzung bewiesen.

Satz 3. *Eine reguläre Halbgruppe läßt sich in eine Gruppe einbetten, wenn sie die Oresche Bedingung erfüllt.*

Will man entsprechend, also wieder mit der Definition (12) den Satz 1 anwenden, so folgt schon daraus, daß E_a ein rechtsreguläres Element enthalten soll, die Rechtsregularität von a selbst: $x+a=y+a$ und die Rechtsregularität von $a+b$ ziehen $x+(a+b)=y+(a+b)$ und daher $x=y$ nach sich. Die Unbeschränktheit aller Linkstranslationen bedeutet aber gerade die Oresche Bedingung. Daher ergibt Satz 1, daß eine nur aus rechtsregulären Elementen bestehende Halbgruppe H, welche die Oresche Bedingung erfüllt, in eine Halbgruppe eingebettet werden kann, in der jedes reguläre (d.h. sowohl rechts- wie linksreguläre) Element von H ein Inverses besitzt. Dieses Ergebnis läßt sich dadurch verschärfen, daß man nicht alle Elemente von H als rechtsregulär voraussetzt, sondern nur eine Unterhalbgruppe R von rechtsregulären Elementen betrachtet, welche die folgende abgeänderte Oresche Bedingung erfüllt:

(O_R) *Zu $a\in H$, $b\in R$ gibt es $c\in R$, $d\in H$ mit $a+c=b+d$.*

Es gilt nämlich

Satz 4. *Erfüllt die Unterhalbgruppe R aus rechtsregulären Elementen der Halbgruppe H die Bedingung (O_R), so läßt sich H in eine Halbgruppe einbetten, in der jedes in R liegende reguläre Element von H ein Inverses besitzt.*

Beweis. Zu $a, b\in R$ gibt es $c\in R$, $d\in H$ mit $e=a+c=b+d\in R$, woraus $t_e(H)\subseteq t_a(H)\cap t_b(H)$ folgt. Daher bilden die $t_a(H)$ mit $a\in R$ eine Filterbasis. Zu dem von dieser erzeugten Filter $\mathfrak{F}$ wird die Halbgruppe Φ aus **1** gebildet. Für $a\in H$, $b\in R$ folgt aus (O_R) die Existenz von $c\in R$, $d\in H$ mit $a+(c+x)=b+(d+x)$ für alle $x\in H$ und daher $t_a(t_c(H))\subseteq t_b(H)$, also

$$t_c(H)\subseteq t_a^{-1}(t_b(H)).$$

Damit ist $t_a\in\Phi$ für alle $a\in H$ nachgewiesen. Wegen der Halbgruppeneigenschaft von R und

$$t_a(t_b(H))=t_{a+b}(H)$$

hat man auch $t_a^{-1}\in\Phi$ für jedes reguläre Element $a\in R$. Ist $t_a\doteq t_b$, also $a+x=b+x$ für alle $x\in t_c(H)$ bei geeignetem $c\in R$, so folgt $a=b$ wegen $c+c\in R\cap t_c(H)$. Daher ist H isomorph zur Halbgruppe Φ' der Linkstranslationen und diese erfüllt alle Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem Hilfssatz kann dann also H in eine Halbgruppe eingebettet werden, in der jedes in R liegende reguläre Element von H ein Inverses besitzt.

Der Fall, daß R nur aus regulären Elementen besteht, läßt sich durch die Existenz einer einbettenden Halbgruppe mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften kennzeichnen. Es gilt nämlich der im Wesentlichen schon bekannte[4])

[4]) Bei Asano [1] wird er (bis auf den zweiten Teil des Zusatzes) für die multiplikativen Halbgruppen von Ringen bewiesen.

SATZ 5. *Genau dann erfüllen die Halbgruppe H und eine Unterhalbgruppe R aus regulären Elementen von H die Bedingung* (O_R), *wenn H in eine Halbgruppe H' eingebettet werden kann, in der jedes Element $r \in R$ ein Inverses $-r$ besitzt und die nur aus den $a-b$ $(=a+(-b))$ mit $a \in H$, $b \in R$ besteht.*

ZUSATZ. *Enthält R die sämtlichen regulären Elemente*[5]) *von H und gilt* (O_R), *so hat in H' jedes reguläre Element ein Inverses, und wenn in H jedes linksreguläre Element bereits regulär ist, gilt dasselbe für H'.*

BEWEIS. Ist H in eine Halbgruppe mit den angegebenen Eigenschaften eingebettet, so muß es zu $a \in H$, $b \in R$ auch Elemente $c \in R$, $d \in H$ mit $(-b)+a = d+(-c)$, also $a+c=b+d$ geben. Es gilt also dann (O_R). Sei umgekehrt die Bedingung (O_R) erfüllt. Nach Satz 4 kann dann also H in eine Halbgruppe eingebettet werden, in der jedes Element von R ein Inverses besitzt. In dieser erweist sich nun die Teilmenge H' der $a-b$ mit $a \in H$, $b \in R$ als Unterhalbgruppe; denn zu $a_i \in H$, $b_i \in R$ $(i=1, 2)$ gibt es nach (O_R) $c \in R$, $d \in H$ mit $a_2+c=b_1+d$, so daß $(-b_1)+a_2=d+(-c)$ und daher $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)=(a_1+d)-(b_2+c)$ mit $b_2+c \in R$ gilt. Da man in H' für jedes $a \in H$ die Gleichung $a=(a+b)-b$ mit einem $b \in R$ hat, ist H Unterhalbgruppe von H'. Damit ist der Beweis des Satzes beendet. Zum Beweis des Zusatzes beachtet man, daß die Links- oder Rechtsregularität eines Elementes $a-b$ $(a \in H,\ b \in R)$ auch die Links- bzw. Rechtsregularität von a nach sich zieht; denn aus $a+x=a+y$ bzw. $x+a=y+a$ folgt $(a-b)+(b+x)=(a-b)+(b+y)$ bzw. $x+(a-b)=y+(a-b)$, weiter daraus im ersten Fall $b+x=b+y$ und daher (wegen $b \in R$) $x=y$, während sich im zweiten Fall sofort $x=y$ ergibt. Bei Regularität von a aber enthält H' auch das Inverse $b-a$ von $a-b$, sofern R aus allen regulären Elementen von H besteht.

Ist R Teilmenge des Zentrums von H, so gilt (O_R) stets (mit $c=b$, $d=a$), und man erhält aus Satz 5 insbesondere das bei BOURBAKI [2] angeführte Ergebnis, wenn man für R die Halbgruppe der regulären Elemente nimmt. Ferner liefert Satz 5 gerade die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von ASANO [1] für die Existenz von Rechtsquotientenringen, wenn man für H die multiplikative Halbgruppe (unter Einschluß des Nullelements) eines Ringes nimmt und in H' die Addition durch $a_1 b^{-1}+a_2 b^{-1}=(a_1+a_2)b^{-1}$ $(a_i \in H,\ b \in R)$ erklärt. Dabei ist natürlich erstens zu zeigen, daß zwei beliebige Elemente von H' stets in der Form $a_i b^{-1}$ $(a_i \in H,\ b \in R)$ angenommen werden können, und zweitens, daß aus $a_i b^{-1}=c_i d^{-1}$ $(i=1, 2)$ stets $(a_1+a_2)b^{-1}=(c_1+c_2)d^{-1}$ folgt. Beides gelingt leicht mittels (O_R). Nur der Beweis der zweiten Behauptung sei hier ausgeführt: Man bestimmt $e \in R$, $f \in H$ mit $be=df$, hat dann $a_i e=c_i f$ $(i=1, 2)$, also $(a_1+a_2)e=(c_1+c_2)f$, daher $a_1+a_2=(c_1+c_2)fe^{-1}$ und schließlich $(a_1+a_2)b^{-1}=(c_1+c_2)d^{-1}$. Drittens hat man $0=0b^{-1}$ als neutrales Element der Addition und $(-a)b^{-1}$ als Inverses (bezgl. der Addition) von ab^{-1} festzustellen und — wieder mittels (O_R) — das Assoziativgesetz der Addition und die Distributivgesetze der Multiplikation (bezgl. der Addition) nachzuweisen, was hier nicht ausgeführt zu werden braucht.

[5]) Bekanntlich bilden die regulären Elemente einer Halbgruppe eine Unterhalbgruppe.

4. Die in **1** betrachteten Abbildungen f aus M in M kann man auch mit den Teilmengen $\{(y, x);\ x \in D_f,\ y = f(x)\}$ von $M \times M$ identifizieren[6]). Im folgenden werden daher allgemeiner beliebige Teilmengen ϱ von $M \times M$, also in M definierte binäre Relationen betrachtet, wobei statt $(y, x) \in \varrho$ wie üblich $y \varrho x$ geschrieben sei. Die Menge dieser Relationen ist bekanntlich mit der durch

$$x(\varrho \circ \sigma) z \leftrightarrow \bigvee_y (x \varrho y \wedge y \sigma z). \tag{13}$$

erklärten Relationenmultiplikation $\circ$ eine Halbgruppe. Im folgenden, wie auch schon in (13), sind die lateinischen Buchstaben Variable für Elemente aus M, die griechischen Buchstaben Variable für Teilmengen von $M \times M$, und die Zeichen $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\wedge$ stehen für „wenn ..., so", „genau dann, wenn", „es gibt", „für alle", „und". An die Stelle von (2) tritt jetzt die Definition

$$\varrho^*(X) = \{y;\ \bigwedge_x (x \varrho y \rightarrow x \in X)\}. \tag{14}$$

Man beachte, daß daraus für eine Abbildung[7]) f aus M in M (an Stelle von ϱ) allerdings die Gleichung

$$f^*(X) = f^{-1}(X) \cup (M - D_f), \tag{15}$$

also nicht die Übereinstimmung von $f^*(X)$ und $f^{-1}(X)$ folgt; es lohnt sich nicht, durch eine Abänderung von (14) das Zusatzglied $M - D_f$ in (15) zu beseitigen. Analog zu einer in **1** verwandten Gleichung erhält man jetzt aus (13), (14)

$$(\varrho \circ \sigma)^*(X) = \sigma^*\big(\varrho^*(X)\big). \tag{16}$$

Zum Beweis hat man nur die logische Gleichwertigkeit der folgenden Zeilen der Reihe nach zu überprüfen:

$$\begin{gathered} z \in (\varrho \circ \sigma)^*(X), \\ \bigwedge_x (\bigvee_y (x \varrho y \wedge y \sigma z) \rightarrow x \in X), \\ \bigwedge_x \bigwedge_y \big(y \sigma z \rightarrow (x \varrho y \rightarrow x \in X)\big), \\ \bigwedge_y \big(y \sigma z \rightarrow \bigwedge_x (x \varrho y \rightarrow x \in X)\big), \\ \bigwedge_y \big(y \sigma z \rightarrow y \in \varrho^*(X)\big), \\ z \in \sigma^*\big(\varrho^*(X)\big). \end{gathered}$$

Aus (16) folgt nun, daß bei vorgegebenem Filter $\mathfrak{F}$ in M die Menge

$$\mathsf{P} = \{\varrho;\ \bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} \varrho^*(F) \in \mathfrak{F}\}$$

eine Halbgruppe bezgl. der Verknüpfung $\circ$ ist. Wegen (15) ergibt sich Φ als Unterhalbgruppe von P. Da aus (15) und (2) die Gleichung $f^{-1}(X) = f^*(X) \cap D_f$ folgt, besteht übrigens Φ aus denjenigen (als Relationen aufgefaßten) Abbildungen aus M in M, die in P liegen und deren Definitionsbereiche zu $\mathfrak{F}$ gehören[8]). Wegen (4) und $D_f \in \mathfrak{F}$ für alle $f \in \Phi$ besagt $f \doteq g$ für $f, g \in \Phi$ dasselbe

[6]) Vielfach führt man Abbildungen überhaupt als solche Teilmengen ein, wobei man allerdings (y, x) durch (x, y) ersetzt. Hier ist dieser Variablenaustausch erfolgt um die übliche Relationenmultiplikation (bei HERMES [3], S. 93, als *Verkettung* bezeichnet) als Verallgemeinerung der in (3) benutzten Verknüpfung $\circ$ auffassen zu können.

[7]) Die, wie zu Anfang des Abschnitts erklärt, als Teilmenge von $M \times M$ aufgefaßt wird.

[8]) Daß diese letzte Bedingung nicht überflüssig ist, erkennt man daraus, daß bei einem Ultrafilter $\mathfrak{F}$ wegen (15) jede Abbildung aus M in M, deren Definitionsbereich nicht zu $\mathfrak{F}$ gehört, Element von P ist.

wie $$\bigvee_{F\in\mathfrak{F}}\bigwedge_{y\in F}\bigwedge_{x}\big((x=f(y)\wedge y\in D_f)\leftrightarrow(x=g(y)\wedge y\in D_g)\big).$$

Daher läßt sich die in Φ erklärte Relation $\doteq$ durch die folgende Definition auf P fortsetzen:

(17) $$\varrho\doteq\sigma\leftrightarrow\bigvee_{F\in\mathfrak{F}}\bigwedge_{y\in F}\bigwedge_{x}(x\,\varrho\,y\leftrightarrow x\,\sigma\,y).$$

Offenbar handelt es sich bei $\doteq$ um eine Äquivalenzrelation. Daß sie mit $\circ$ verträglich ist, ergibt sich folgendermaßen. Für $\varrho,\sigma,\tau\in\mathsf{P}$ folgt aus (17) für geeignetes $F\in\mathfrak{F}$

$$\bigwedge_{z\in F}\bigwedge_{y}(y\,\varrho\,z\leftrightarrow y\,\sigma\,z)$$

und daher

$$\bigwedge_{z\in F}\bigwedge_{x}\big(\bigvee_{y}(x\,\tau\,y\wedge y\,\varrho\,z)\leftrightarrow\bigvee_{y}(x\,\tau\,y\wedge y\,\sigma\,z)\big);$$

also gilt $\tau\circ\varrho\doteq\tau\circ\sigma$. Unter denselben Voraussetzungen erhält man für $F'=\tau^*(F)\in\mathfrak{F}$ wegen (14)

$$\bigwedge_{z\in F'}\bigwedge_{x}\big(\bigvee_{y}(x\,\varrho\,y\wedge y\,\tau\,z)\leftrightarrow\bigvee_{y}(x\,\sigma\,y\wedge y\,\tau\,z)\big);$$

damit ist $\varrho\circ\tau\doteq\sigma\circ\tau$ hergeleitet.

Man kann jetzt die Halbgruppe $\overline{\mathsf{P}}=\mathsf{P}/\doteq$ bilden, und wie in **1** läßt sich jede Unterhalbgruppe P' von P isomorph in $\overline{\mathsf{P}}$ einbetten, wenn für ihre Elemente aus $\varrho\doteq\sigma$ stets $\varrho=\sigma$ folgt. Da die Relation $\iota=\{(x,x);\ x\in M\}$ neutrales Element von P ist, besitzt auch $\overline{\mathsf{P}}$ ein neutrales Element, nämlich die Restklasse von ι. Um zu einem $\varrho\in\mathsf{P}'$ in $\overline{\mathsf{P}}$ ein Inverses zu finden, genügt nun allerdings nicht die Forderung $\varrho^{-1}\in\mathsf{P}$ für die zu ϱ konverse Relation $\varrho^{-1}=\{(x,y);\ y\,\varrho\,x\}$. Damit die Restklasse von ϱ^{-1} Rechts- bzw. Linksinverses von ϱ (identifiziert mit der Restklasse von ϱ) ist, muß vielmehr noch

(18) $$\bigvee_{F\in\mathfrak{F}}\bigwedge_{y\in F}\big(\bigvee_{z}y\,\varrho\,z\wedge\bigwedge_{x}(\bigvee_{z}(x\,\varrho\,z\wedge y\,\varrho\,z)\rightarrow x=y)\big)$$

bzw.

(19) $$\bigvee_{F\in\mathfrak{F}}\bigwedge_{y\in F}\big(\bigvee_{z}z\,\varrho\,y\wedge\bigwedge_{x}(\bigvee_{z}(z\,\varrho\,x\wedge z\,\varrho\,y)\rightarrow x=y)\big)$$

gelten, wie man mittels (13) und (17) leicht erkennt. Geht man entsprechend Hilfssatz 2 zur Halbgruppe $\mathsf{P}_0=\{\varrho;\ \varrho\in\mathsf{P}\wedge\varrho^{-1}\in\mathsf{P}\}$ über, so ist die Gruppeneigenschaft von $\overline{\mathsf{P}}_0=\mathsf{P}_0/\doteq$ natürlich schon gesichert, wenn (18) für alle $\varrho\in\mathsf{P}_0$ oder (19) für alle $\varrho\in\mathsf{P}_0$ gilt. Anscheinend lassen sich die hier gewonnenen Verallgemeinerungen von **1** aber nicht zur Verbesserung der Sätze 1 und 4 verwenden.

Zusatz bei der Korrektur (16. 9. 1961): Für den Fall, daß R nur aus regulären Elementen von H besteht, findet sich Satz 4 schon bei P. DUBREIL, Algèbre I. (Paris 1946), S. 272.

Literatur

[1] ASANO, K.: Über die Quotientenbildung von Schiefringen. J. Math. Soc. Japan **1**, 73–78 (1949).
[2] BOURBAKI, N.: Éléments de Mathématique I, Livre II, Ch. 1, S. 37. Paris 1958.
[3] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[4] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. Math. **32**, 463–477 (1931).
[5] RIBENBOIM, P.: Fonctions modulo un antifiltre. Math. Z. **77**, 195–206 (1961).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. April 1961)

Kowalsky, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 249–272 (1961)

Kategorien topologischer Räume

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Hans-Joachim Kowalsky

Einleitung

Viele Begriffsbildungen aus der Theorie der abelschen Gruppen können bekanntlich auf zwei verschiedene Weisen beschrieben werden: Einmal kann man zu ihnen durch eine interne Definition gelangen, die die algebraische Gruppenstruktur benutzt. Andererseits ist aber auch häufig eine externe Charakterisierung mit Hilfe der Homomorphiebeziehungen innerhalb der Klasse aller abelschen Gruppen möglich; d.h. eine Kennzeichnung, die nur die Kategorie der abelschen Gruppen, nicht aber die algebraische Struktur der einzelnen Gruppen benutzt. Daß eine derartige Beschreibung gruppentheoretischer Sachverhalte unter alleiniger Benutzung kategorientheoretischer Begriffe in recht einfacher Weise möglich ist, hängt eng damit zusammen, daß die abelsche Gruppenstruktur eine starke Bindung für die Homomorphismen darstellt. Bereits wenn man auf die Kommutativität verzichtet, gestalten sich die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Daß jedoch auch in diesem Fall weitgehend analoge Resultate gewonnen werden können, wurde kürzlich von F. Hofmann [6] gezeigt. In der vorliegenden Arbeit wird nun damit begonnen, ähnliche Ergebnisse auch für Kategorien topologischer Räume herzuleiten. Insbesondere wird die Frage untersucht, in welchem Umfang durch die Struktur der Kategorie die topologische Struktur der Räume festgelegt wird.

In Kategorien, deren Objekte topologische Räume und in denen die Morphismen stetige Abbildungen dieser Räume sind, bedingt die topologische Struktur eine wesentlich schwächere Bindung der Morphismen als die algebraische Gruppenstruktur. Derartige Kategorien können daher auch erheblich reichhaltiger an Morphismen sein. Einerseits bedeutet dies eine zusätzliche Komplikation, die eine verfeinerte Einteilung der Morphismen erfordert. Andererseits werden hierdurch unter geeigneten Voraussetzungen weitergehende Rückschlüsse auf die Ausgangsstrukturen ermöglicht.

Wenn man von einer Kategorie topologischer Räume ausgeht, so wird umgekehrt durch die Kategorie im allgemeinen nicht wieder die topologische Struktur der Räume festgelegt. Jede beliebige Kategorie, bei der man nur die Objekte als Mengen und die Morphismen als Abbildungen auffassen kann, läßt sich auf verschiedene Arten als Kategorie topologischer Räume deuten: Man braucht hierzu nur alle Objekte mit der diskreten Topologie oder aber mit der trivialen Topologie (Ø und der ganze Raum sind die einzigen abgeschlossenen Mengen) zu versehen. In beiden Fällen sind dann die Morphismen

stetige Abbildungen. Beschränkt man sich aber von vornherein auf T_1-Räume, so kann man in einfacher Weise zeigen: Zu jeder Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind, gibt es eindeutig bestimmte, gröbste T_1-Topologien der Objekte, hinsichtlich derer die Morphismen stetige Abbildungen sind.

Diejenigen Abbildungen topologischer Räume, deren Bildmengen einpunktig sind, können auch als Morphismen innerhalb der Kategorie durch eine einfache Eigenschaft beschrieben werden. Setzt man nun voraus, daß es in einer Kategorie hinreichend viele solche punktalen Morphismen gibt, so zeigt sich, daß eine derartige Kategorie auf genau eine Weise als Kategorie von T_1-Räumen aufgefaßt werden kann, in der die punktalen Morphismen dann stetige Abbildungen mit einpunktiger Bildmenge sind. Umgekehrt sichern bei einer Kategorie von T_1-Räumen einfache topologische Bedingungen die Existenz genügend vieler punktaler Morphismen. In diesen Fällen bestimmt dann die Struktur der Kategorie bereits eindeutig (bis auf Homöomorphie) die topologische Struktur der Objekte (d.h. die Trägermengen der Räume und deren Topologie).

Aber auch unter andersartigen Voraussetzungen, die sich nicht mehr auf die punktalen Morphismen, sondern auf Bilder, Urbilder usw. beziehen, können noch Rückschlüsse auf topologische Strukturen gezogen werden. Auch dann kann man eine solche Kategorie stets in einem eindeutig bestimmten Sinn als eine Kategorie von T_1-Räumen auffassen, die in gewisser Weise universell ist.

Bei allen diesen Untersuchungen kommt es zunächst darauf an, daß in der betreffenden Kategorie die Morphismen überhaupt als Abbildungen aufgefaßt werden können. Hier ist eine mengentheoretische Forderung wesentlich, die in ähnlicher Form auch bei F. HOFMANN auftritt. Dort wird sie allerdings in erster Linie dazu benutzt, die Eindeutigkeit gewisser Begriffe zu sichern. Darüber hinaus ermöglicht sie jedoch auch die Deutung der Morphismen als Abbildungen und ist hiermit sogar weitgehend gleichbedeutend.

§ 1. Grundbegriffe

Wie üblich sollen unter einer Kategorie $\mathfrak{K}$ folgende Gegebenheiten verstanden werden:

1. Eine nicht-leere Klasse, deren Elemente Objekte von $\mathfrak{K}$ genannt und mit $X, Y, Z, \ldots$ bezeichnet werden.

2. Jedem geordneten Paar (X, Y) von Objekten ist eindeutig eine Menge $\mathrm{Hom}(X, Y)$ zugeordnet. Für verschiedene Paare (X, Y) und (X', Y') gilt $\mathrm{Hom}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}(X', Y') = \emptyset$. Die Elemente der Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ werden Morphismen von $\mathfrak{K}$ genannt und mit $f, g, h, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ bezeichnet. Statt $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ wird auch $f: X \to Y$ geschrieben. Von den Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soll in dieser Arbeit stets vorausgesetzt werden, daß sie nicht leer sind.

3. Jedem geordneten Tripel (X, Y, Z) von Objekten ist eine mit $\circ$ bezeichnete Abbildung (Komposition) von $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z)$ in $\mathrm{Hom}(X, Z)$ so zugeordnet, daß das Assoziativgesetz

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

erfüllt ist.

4. In $\mathrm{Hom}(X, X)$ existiert ein (und dann auch nur ein) Morphismus j_X mit

$$f \circ j_X = f \quad \text{und} \quad j_X \circ g = g$$

für alle $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$. Man nennt j_X die Identität von X.

Statt j_X wird häufig nur j geschrieben. Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen außerdem die Klassen

$$\mathrm{Hom}(X, .) = \bigcup_Y \mathrm{Hom}(X, Y) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(., X) = \bigcup_Y \mathrm{Hom}(Y, X)$$

eingeführt werden. Sie sind im allgemeinen keine Mengen. Statt $f \in \mathrm{Hom}(X, .)$ wird auch $f: X \to$ und statt $g \in \mathrm{Hom}(., X)$ entsprechend $g: \to X$ geschrieben. Eine Gleichung der Form $h = g \circ f$ soll stets einschließen, daß diese Komposition definiert ist, daß also $f: \to X$ und $g: X \to$ gilt. Es werden dann f, g Faktoren und die Darstellung $h = g \circ f$ wird eine Faktorisierung von h genannt.

Definition 1a. *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(X, .)$ bedeute $f \uparrow g$, daß aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ stets $g \circ \varphi = g \circ \varphi'$ folgt.*

Für $f, g \in \mathrm{Hom}(., X)$ bedeute $f \downarrow g$, daß aus $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ stets $\varphi \circ g = \varphi' \circ g$ folgt.

Die Beziehungen $\uparrow$ und $\downarrow$ sind dual. Außerdem sind sie offenbar reflexiv und transitiv. Setzt man in der Definition speziell $g = j_X$, so erhält man die übliche Kennzeichnung der Monomorphismen und Epimorphismen.

Definition 1b. *f heißt monomorph oder ein Monomorphismus, wenn $f \uparrow j$ gilt; d.h. wenn aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ stets $\varphi = \varphi'$ folgt.*

f heißt epimorph oder ein Epimorphismus, wenn $f \downarrow j$ gilt; d.h. wenn aus $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ stets $\varphi = \varphi'$ folgt.

Betrachtet man etwa die Kategorie aller T_1-Räume mit allen stetigen Abbildungen als Morphismen, so ist $f \uparrow g$ gleichwertig damit, daß aus $f(x) = f(x')$ stets $g(x) = g(x')$ für alle Punkte x und x' des Definitionsbereichs folgt. Weiter ist hier $f \downarrow g$ gleichwertig damit, daß die Bildmenge von g in der Bildmenge von f enthalten ist. Insbesondere sind also die Monomorphismen genau die stetigen 1—1-Abbildungen, und die Epimorphismen sind genau die stetigen Abbildungen auf den Bildraum. Dies braucht jedoch nicht mehr zu gelten, wenn die Kategorie nicht alle T_1-Räume oder nicht alle stetigen Abbildungen enthält.

Unmittelbar aus den Definitionen ergibt sich:

1.1. *Aus $f \uparrow g$ folgt $f \circ h \uparrow g \circ h$ und aus $f \downarrow g$ entsprechend $h \circ f \downarrow h \circ g$. Es gilt $f \uparrow h \circ f$ und $f \downarrow f \circ h$.*

Mit f und g ist auch $g \circ f$ ein Monomorphismus bzw. Epimorphismus.

1.2. *Es sei $g \circ f$ ein Monomorphismus (Epimorphismus). Dann ist auch f ein Monomorphismus (g ein Epimorphismus).*

Beweis. Aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ folgt $g \circ f \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi'$. Ist $g \circ f$ monomorph, so erhält man weiter $\varphi = \varphi'$; d.h. auch f ist monomorph. Die zweite Behauptung ist der duale Satz.

1.3. *Es sei h ein Monomorphismus. Aus $f \uparrow g$ folgt dann $h \circ f \uparrow g$ und aus $f \uparrow h \circ g$ auch $f \uparrow g$.*

Es sei h ein Epimorphismus. Aus $f\downarrow g$ folgt dann $f\circ h\downarrow g$ und aus $f\downarrow g\circ h$ auch $f\downarrow g$.

BEWEIS. Wenn h monomorph ist, ergibt sich aus $h\circ f\circ\varphi=h\circ f\circ\varphi'$ zunächst $f\circ\varphi=f\circ\varphi'$ und wegen $f\uparrow g$ dann weiter $g\circ\varphi=g\circ\varphi'$; d.h. es gilt $h\circ f\uparrow g$. Jetzt werde $f\uparrow h\circ g$ mit monomorphem h vorausgesetzt. Aus $f\circ\varphi=f\circ\varphi'$ folgt dann $h\circ g\circ\varphi=h\circ g\circ\varphi'$ und weiter $g\circ\varphi=g\circ\varphi'$; d.h. es gilt $f\uparrow g$. Die übrigen Behauptungen ergeben sich durch Dualisierung.

DEFINITION 1c. *f heiße injektiv oder eine Injektion, wenn f monomorph ist und aus $f\downarrow g$ stets eine Faktorisierung der Form $g=f\circ g^*$ folgt.*

f heißt surjektiv oder eine Surjektion, wenn f epimorph ist und aus $f\uparrow g$ stets eine Faktorisierung der Form $g=g^*\circ f$ folgt.

f heiße isomorph oder ein Isomorphismus, wenn f gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

Injektion und Surjektion sind duale Begriffe. In den Faktorisierungen $g=f\circ g^*$ bzw. $g=g^*\circ f$ ist g^* jeweils eindeutig bestimmt: Aus $f\circ g^*=g=f\circ g_1^*$ folgt z.B., weil f monomorph ist, unmittelbar $g_1^*=g^*$.

In der Kategorie aller T_1-Räume ist $f:X\to Y$ genau dann eine Injektion, wenn f ein Homöomorphismus von X auf den durch $f(X)$ bestimmten Unterraum von Y ist. Weiter ist f genau dann eine Surjektion, wenn f eine Abbildung auf Y ist und wenn Y die durch f bestimmte Quotiententopologie trägt. Daher sind schließlich die Isomorphismen genau die Homöomorphismen.

Im allgemeinen ist mit f und g nicht auch $g\circ f$ eine Injektion oder Surjektion. Es gilt jedoch:

1.4. *Es sei f ein Isomorphismus. Mit g ist dann auch $g\circ f$ und $f\circ g$ eine Injektion (Surjektion).*

BEWEIS. g sei injektiv. Wegen 1.1 ist $g\circ f$ ein Monomorphismus, aus $g\circ f\downarrow h$ folgt $g\downarrow h$ und weiter dann $h=g\circ h^*$. Da f als Isomorphismus auch epimorph ist, ergibt sich aus $\varphi\circ f=\varphi'\circ f$ stets $\varphi=\varphi'$, erst recht also $\varphi\circ h^*=\varphi'\circ h^*$. Daher gilt $f\downarrow h^*$, woraus weiter $h^*=f\circ h'$, insgesamt also $h=g\circ f\circ h'$ folgt. Damit ist $g\circ f$ sogar injektiv.

Zweitens ist mit g auch $f\circ g$ monomorph. Weiter gelte $f\circ g\downarrow h$. Dann erhält man auch $f\downarrow h$ und $h=f\circ h^*$. Es werde nun $\varphi\circ g=\varphi'\circ g$ vorausgesetzt. Da f monomorph ist, folgt aus $f\circ\psi=f\circ\psi'$ stets $\psi=\psi'$ und somit erst recht $\varphi\circ\psi=\varphi\circ\psi'$ und $\varphi'\circ\psi=\varphi'\circ\psi'$, also $f\uparrow\varphi$ und $f\uparrow\varphi'$. Da f als Isomorphismus surjektiv ist, ergibt sich weiter $\varphi=\varphi_1\circ f$ und $\varphi'=\varphi_1'\circ f$. Wegen $\varphi_1\circ f\circ g=\varphi\circ g=\varphi'\circ g=\varphi_1'\circ f\circ g$ und wegen $f\circ g\downarrow h$ erhält man jetzt $\varphi_1\circ h=\varphi_1'\circ h$ und

$$\varphi\circ h^*=\varphi_1\circ f\circ h^*=\varphi_1\circ h=\varphi_1'\circ h=\varphi_1'\circ f\circ h^*=\varphi'\circ h^*,$$

also $g\downarrow h^*$. Ist g injektiv, so folgt $h^*=g\circ h'$ und insgesamt $h=f\circ g\circ h'$; d.h. auch $f\circ g$ ist injektiv. Die entsprechenden Behauptungen über Surjektionen erhält man durch Dualisierung.

1.5. *Es sei $g\circ f$ eine Injektion (Surjektion). Ist dann g monomorph (f epimorph), so ist auch f eine Injektion (g eine Surjektion).*

Beweis. Es sei g ein Monomorphismus und $g \circ f$ eine Injektion. Nach 1.2 ist auch f monomorph. Weiter gelte $f \downarrow h$, also auch $g \circ f \downarrow g \circ h$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $g \circ h = g \circ f \circ h^*$. Da aber g monomorph ist, ergibt sich weiter $h = f \circ h^*$. Die zweite Behauptung ist der duale Satz.

1.6. *Für einen Morphismus f sind folgende Behauptungen paarweise gleichwertig:*

(1) *f ist ein Isomorphismus.*

(2) *f ist injektiv und epimorph.*

(3) *f ist surjektiv und monomorph.*

(4) *Es existiert ein Morphismus g mit $g \circ f = j$ und $f \circ g = j$.*

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2) und (1) $\rightarrow$ (3) folgen unmittelbar aus den Definitionen.

(2) $\rightarrow$ (4): Da $f: X \rightarrow Y$ epimorph ist, gilt $f \downarrow j_Y$. Da f außerdem injektiv ist, gibt es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ mit $j_Y = f \circ g$. Es folgt $f \circ j_X = f = j_Y \circ f = f \circ g \circ f$ und hieraus (f ist monomorph) $j_X = g \circ f$.

Durch Dualisierung von (2) $\rightarrow$ (4) erhält man (3) $\rightarrow$ (4).

(4) $\rightarrow$ (1): Aus $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ folgt $\varphi = j_X \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi = g \circ f \circ \varphi' = j_X \circ \varphi' = \varphi'$; d.h. f ist monomorph. Aus $f \downarrow h$ ergibt sich $h = j_Y \circ h = f \circ g \circ h$, weswegen f sogar injektiv ist. Da (4) selbstdual ist, muß f außerdem eine Surjektion und somit ein Isomorphismus sein.

In 1.6 (4) ist g durch f eindeutig bestimmt und wegen der Symmetrie der Voraussetzung ebenfalls ein Isomorphismus. Er heißt der zu f *inverse Isomorphismus* und wird mit f^{-1} bezeichnet. Unmittelbar ergibt sich:

1.7. *Wenn in $h = g \circ f$ zwei der Morphismen f, g, h Isomorphismen sind, so ist auch der dritte ein Isomorphismus.*

$$(f^{-1})^{-1} = f \quad \text{und} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.8. *Es gelte $g \circ f = g' \circ f'$, es sei f epimorph und g' injektiv. Dann gibt es genau einen Morphismus h mit $g = g' \circ h$ und $f' = h \circ f$. Ferner gilt:*

Ist f' epimorph und g injektiv, so ist h ein Isomorphismus.

Ist f' surjektiv und g monomorph, so ist h ebenfalls ein Isomorphismus; außerdem ist dann f surjektiv und g injektiv.

Beweis. Wegen $g' \circ f' = g \circ f$ gilt $g' \downarrow g \circ f$ und wegen 1.3 (f ist epimorph) sogar $g' \downarrow g$. Da g' injektiv ist, existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus h mit $g = g' \circ h$. Wegen $g' \circ f' = g \circ f = g' \circ h \circ f$ folgt außerdem $f' = h \circ f$, weil g' monomorph ist.

Mit f' ist nach 1.2 auch h ein Epimorphismus. Ist außerdem g injektiv, so ist nach 1.5 auch h eine Injektion, wegen 1.6 also ein Isomorphismus.

Andererseits ist mit f' nach 1.5 auch h eine Surjektion. Außerdem ist nach 1.2 mit g auch h ein Monomorphismus. Wegen 1.6 ist daher h ein Isomorphismus. Es folgt $f = h^{-1} \circ f'$, und wegen 1.4 ist f surjektiv und g injektiv.

§ 2. Punktale Morphismen

In der Kategorie aller topologischen Räume oder auch nur aller T_1-Räume sind diejenigen stetigen Abbildungen $p: X \to Y$, bei denen die Bildmenge $p(X)$ einpunktig ist, durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Für beliebige Abbildungen φ und φ' eines Raumes in X gilt $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$. In der Kategorie aller Gruppen charakterisiert diese Eigenschaft die Null-Homomorphismen; und diese besitzen dann auch die duale Eigenschaft. Im Fall der topologischen Räume wird jedoch die duale Forderung von keiner Abbildung erfüllt. Dieses Beispiel erklärt, warum bei den folgenden Betrachtungen auf die volle Dualität verzichtet werden muß. Hiermit hängt auch zusammen, daß unter den Beziehungen $\uparrow$ und $\downarrow$ die zweite eine wesentlich stärkere Rolle spielen wird.

DEFINITION 2a. *Ein Morphismus $p: X \to$ heiße punktal, wenn für alle Objekte Z und für alle $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ stets $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ gilt.*

Unmittelbar aus dieser Definition folgt:

2.1. *Mit p ist auch $p \circ f$ und $g \circ p$ ein punktaler Morphismus.*
Ist g monomorph und $g \circ p$ punktal, so ist auch p punktal.

2.2. *Es gelte $p \downarrow f$, und p sei punktal. Dann ist auch f punktal, es gilt $f \downarrow p$, und es gibt Faktorisierungen $f = p \circ f^*$ und $p = f \circ p^*$.*

BEWEIS. Es gelte $p: X \to Y$ und $f: Z \to Y$. Ferner seien die Morphismen $\varphi: Y \to Z$ und $\psi: Z \to X$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$j_Y \circ p = p = p \circ j_X = p \circ \psi \circ \varphi \circ p.$$

Wegen $p \downarrow f$ folgt

$$f = j_Y \circ f = p \circ \psi \circ \varphi \circ f,$$

mit $f^* = \psi \circ \varphi \circ f$ also $f = p \circ f^*$. Hieraus ergibt sich wegen 2.1, daß auch f punktal ist. Setzt man $p^* = \varphi \circ p$, so gilt außerdem $p = p \circ j_X = p \circ f^* \circ p^* = f \circ p^*$. Hieraus folgt schließlich noch $f \downarrow p$.

2.3. *Jeder punktale Monomorphismus ist eine Injektion, jeder punktale Epimorphismus ist eine Surjektion.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus 2.2. Weiter sei $p: X \to Y$ ein punktaler Epimorphismus, und es gelte $p \uparrow q$. Für beliebiges Z und Morphismen $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ erhält man dann $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ und daher auch $q \circ \varphi = q \circ \varphi'$; d.h. q ist ebenfalls punktal. Mit einem beliebigen Morphismus $\psi: Y \to X$ ergibt sich somit $q = q \circ j_X = q \circ \psi \circ p$, mit $q^* = q \circ \psi$ also $q = q^* \circ p$. Daher ist p sogar surjektiv.

DEFINITION 2b. *Ein Objekt E soll ein Einsobjekt heißen, wenn für jedes X die Menge $\mathrm{Hom}(X, E)$ einelementig ist.*

Wenn E und E' zwei Einsobjekte sind, so gilt $\mathrm{Hom}(E, E') = \{\lambda\}$ und $\mathrm{Hom}(E', E) = \{\lambda'\}$. Wegen $\mathrm{Hom}(E, E) = \{j_E\}$ und $\mathrm{Hom}(E', E') = \{j_{E'}\}$ folgt $\lambda' \circ \lambda = j_E$ und $\lambda \circ \lambda' = j_{E'}$. Wegen 1.6 sind daher λ und λ' Isomorphismen mit $\lambda' = \lambda^{-1}$. Je zwei Einsobjekte sind also isomorph. Wenn E ein Einsobjekt ist, soll der einzige Morphismus aus $\mathrm{Hom}(X, E)$ stets mit λ_X bezeichnet werden.

2.4. *Es sei $p: E \to$ ein punktaler Monomorphismus. Dann ist E ein Einsobjekt.*

Beweis. Es gelte $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(X, E)$. Da p punktal ist, folgt $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$, und da p monomorph ist, weiter auch $\varphi = \varphi'$. Daher ist $\mathrm{Hom}(X, E)$ einelementig.

5.2. *Es sei E ein Einsobjekt. Für jedes X ist dann λ_X eine punktale Surjektion, und jeder Morphismus aus $\mathrm{Hom}(E, X)$ ist eine punktale Injektion.*

Beweis. Für beliebige $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ sind $\lambda_X \circ \varphi$ und $\lambda_X \circ \varphi'$ Morphismen aus $\mathrm{Hom}(Y, E)$. Es folgt $\lambda_X \circ \varphi = \lambda_Y = \lambda_X \circ \varphi'$, und λ_X ist somit punktal. Weiter sei $\mu: E \to X$ beliebig. Dann gilt $\lambda_X \circ \mu \in \mathrm{Hom}(E, E)$, also $\lambda_X \circ \mu = j_E$. Aus $\psi \circ \lambda_X = \psi' \circ \lambda_X$ folgt daher

$$\psi = \psi \circ j_E = \psi \circ \lambda_X \circ \mu = \psi' \circ \lambda_X \circ \mu = \psi' \circ j_E = \psi'.$$

Somit ist λ_X auch epimorph, wegen 2.3 also eine Surjektion.

Es gelte jetzt $p: E \to X$. Aus $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(Y, E)$ folgt $\varphi = \lambda_Y = \varphi'$, also auch $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$; d.h. p ist punktal. Umgekehrt folgt aus $p \circ \varphi = p \circ \varphi'$ trivialerweise $\varphi = \varphi'$, weswegen p außerdem monomorph, wegen 2.3 also eine Injektion ist.

2.6. *Es sei E ein Einsobjekt: Ein Morphismus $p: X \to Y$ ist genau dann punktal, wenn er eine Faktorisierung $p = p^* \circ \lambda_X$ gestattet.*

Beweis. Es gelte $p = p^* \circ \lambda_X$. Wegen 2.5 ist λ_X, wegen 2.1 aber auch p punktal. Umgekehrt sei p punktal, und $\mu: E \to X$ sei beliebig gewählt. Dann gilt $p = p \circ j_X = p \circ \mu \circ \lambda_X$, mit $p^* = p \circ \mu$ also $p = p^* \circ \lambda_X$.

An die Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun zunächst eine, allerdings sehr scharfe, Forderung gestellt werden, die es unmittelbar ermöglicht, die Morphismen als Abbildungen geeigneter Mengen aufzufassen. Die Kategorie besitze nämlich folgende Eigenschaft:

(E) *$\mathfrak{K}$ enthält ein Einsobjekt E. Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ existiere ferner ein $p: E \to X$ mit $f \circ p \neq g \circ p$.*

Gilt $f: X \to Y$ und $p: E \to X$, so folgt $f \circ p: E \to Y$. Durch $\hat{f}(p) = f \circ p$ wird somit eine Abbildung $\hat{f}: \mathrm{Hom}(E, X) \to \mathrm{Hom}(E, Y)$ definiert. Offenbar gilt $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$. Sind f und g zwei verschiedene Morphismen aus $\mathrm{Hom}(X, Y)$, so gibt es wegen (E) ein $p \in \mathrm{Hom}(E, X)$ mit $f \circ p \neq g \circ p$, also mit $\hat{f}(p) \neq \hat{g}(p)$. Daher sind dann auch $\hat{f}$ und $\hat{g}$ verschiedene Abbildungen. Setzt man noch

$$\hat{X} = \mathrm{Hom}(E, X) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y}) = \{\hat{f}: f \in \mathrm{Hom}(X, Y)\},$$

so bilden die neuen Objekte $\hat{X}$ und die Mengen $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ eine Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$, in der die Morphismen Abbildungen sind und die Komposition die Hintereinanderschaltung dieser Abbildungen ist. Durch

$$\Phi(X) = \hat{X} \quad \text{und} \quad \Phi(f) = \hat{f}$$

wird ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\hat{\mathfrak{K}}$ definiert. Die Kategorien $\mathfrak{K}$ und $\hat{\mathfrak{K}}$ sind somit isomorph.

Die Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$ und auch jede andere Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind, kann nun in natürlich ausgezeichneter Weise als Kategorie von T_1-Räumen aufgefaßt werden: Es bedeute $\mathfrak{A}(\hat{X})$ das System aller Teilmengen von $\hat{X}$, die bei einer geeigneten Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\hat{X}, .)$ Urbild eines Punktes sind. Da jeder Punkt von $\hat{X}$ Urbild von sich selbst bei der Identität ist, enthält $\mathfrak{A}(\hat{X})$ jedenfalls alle Punkte von $\hat{X}$. Da $\hat{E} = \mathrm{Hom}(E, E)$ eine einpunktige Menge und $\hat{X}$ Urbild von $\hat{E}$ bei der Abbildung $\hat{\lambda}_X$ ist, gilt außerdem $\hat{X} \in \mathfrak{A}(\hat{X})$. Auf $\hat{X}$ gibt es nun bekanntlich genau eine gröbste Topologie $\hat{\tau}$, bei der die Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ abgeschlossen sind: Eine nichtleere Teilmenge von $\hat{X}$ ist genau dann $\hat{\tau}$-abgeschlossen, wenn sie sich als Durchschnitt von Mengen darstellen läßt, die ihrerseits Vereinigungen von je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ sind. Der so bestimmte topologische Raum soll mit $(\hat{X}, \hat{\tau})$ bezeichnet werden. Da $\mathfrak{A}(\hat{X})$ alle Punkte von $\hat{X}$ enthält, ist $\hat{\tau}$ eine T_1-Topologie.

2.7. *Die Topologien $\hat{\tau}$ besitzen folgende Eigenschaften, durch die sie umgekehrt auch eindeutig gekennzeichnet werden:*

(*a*) *Jede Abbildung aus* $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ *ist eine stetige Abbildung von* $(\hat{X}, \hat{\tau})$ *in* $(\hat{Y}, \hat{\tau})$.

(*b*) *Wenn jedem $\hat{X}$ eine T_1-Topologie τ' so zugeordnet ist, daß* $\mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ *aus lauter stetigen Abbildungen von $(\hat{X}, \tau')$ in $(\hat{Y}, \tau')$ besteht, dann sind die Topologien τ' mindestens so fein wie die Topologien $\hat{\tau}$ (d.h. jede $\hat{\tau}$-abgeschlossene Menge ist auch τ'-abgeschlossen).*

BEWEIS. Aus $\hat{f} \in \mathrm{Hom}(\hat{X}, \hat{Y})$ und $A \in \mathfrak{A}(\hat{Y})$ folgt, daß das Urbild von A bei $\hat{f}$ zu $\mathfrak{A}(\hat{X})$ gehört. Hieraus ergibt sich unmittelbar Eigenschaft (a). Sind umgekehrt T_1-Topologien τ' gegeben, hinsichtlich derer alle Morphismen stetige Abbildungen sind, so müssen die Urbilder von Punkten, also die Mengen aus $\mathfrak{A}(\hat{X})$ jedenfalls τ'-abgeschlossen sein. Dann aber sind überhaupt alle $\hat{\tau}$-abgeschlossenen Mengen auch τ'-abgeschlossen; d.h. es gilt (b).

Eine Kategorie $\mathfrak{K}$ soll kurz eine T_1-Kategorie genannt werden, wenn die Objekte X von $\mathfrak{K}$ mit T_1-Topologien τ versehen sind und wenn die Morphismen stetige Abbildungen dieser topologischen Räume sind. Zur Kennzeichnung der Topologien soll dann eine solche T_1-Kategorie genauer mit $(\mathfrak{K}, \tau)$ bezeichnet werden, während $\mathfrak{K}$ allein lediglich die Struktur der Kategorie kennzeichnen soll. Nach der vorangehenden Konstruktion bestimmt jede Kategorie $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft (E) eindeutig eine T_1-Kategorie $(\hat{\mathfrak{K}}, \hat{\tau})$.

DEFINITION 2c. *Zwei T_1-Kategorien $(\mathfrak{K}, \tau)$ und $(\mathfrak{K}', \tau')$ sollen topologisch isomorph genannt werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind als Kategorien isomorph; d.h. es gibt einen eineindeutigen Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}'$.*

(2) *Zu jedem Raum (X, τ) aus $(\mathfrak{K}, \tau)$ gibt es einen Homöomorphismus h_X von (X, τ) auf den Raum $(\Phi(X), \tau')$.*

(3) *Die Homöomorphismen h_X sind mit Φ vertauschbar: Aus $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ folgt $h_Y \circ f = \Phi(f) \circ h_X$.*

2.8. *Es sei $(\mathfrak{K}, \tau)$ eine T_1-Kategorie mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathfrak{K}$ enthält mit jedem Raum X auch jeden Unterraum U von X, und der natürliche Homöomorphismus von U in X ist ein Morphismus aus* $\mathrm{Hom}(U, X)$.

(2) *$\mathfrak{K}$ enthält mit jedem Raum X und mit jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X auch den Quotientenraum X/A, und die natürliche Projektion von X auf X/A ist ein Morphismus aus* $\mathrm{Hom}(X, X/A)$.

Dann besitzt $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft (E), *und $(\mathfrak{K}, \tau)$ ist zu $(\widehat{\mathfrak{K}}, \hat{\tau})$ topologisch isomorph.*

Beweis. Es sei Z ein beliebiges Objekt aus $\mathfrak{K}$ und z ein beliebiger Punkt aus Z. Wegen (1) ist dann die einpunktige Menge $\{z\}$ ein Objekt E von $\mathfrak{K}$ und offenbar auch ein Einsobjekt. Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Wieder wegen (1) ist $\{x\}$ ein Objekt von $\mathfrak{K}$, und der natürliche Homöomorphismus q von $\{x\}$ in X ist ein punktaler Morphismus mit $f \circ q \neq g \circ q$. Nach 2.6 gilt $q = p \circ \lambda$ mit $p: E \to X$ und $\lambda: \{x\} \to E$. Es folgt $f \circ p \neq g \circ p$; d.h. es gilt (E). Außerdem hat sich gezeigt, daß jeder Punkt $x \in X$ eindeutig einen Morphismus $p_x: E \to X$ mit $p_x(z) = x$ bestimmt. Durch $h_X(x) = p_x$ wird daher eine Abbildung h_X von X in das Objekt $\Phi(X) = \hat{X} = \mathrm{Hom}(E, X)$ von $\widehat{\mathfrak{K}}$ definiert, die offensichtlich auch eine 1—1-Abbildung ist. Außerdem erfüllen die Abbildungen h_X die Vertauschungsbedingung (3) aus 2c. Es ist daher nur noch zu zeigen, daß h_X ein Homöomorphismus von (X, τ) auf $(\hat{X}, \hat{\tau})$ ist. Jeder Morphismus $p: E \to X$ bestimmt einen Punkt $x = p(z)$ von X, und es gilt $p = p_x = h_X(x)$. Daher ist h_X jedenfalls eine Abbildung *auf* $\hat{X}$. Nach Voraussetzung sind die Morphismen aus $\mathfrak{K}$ stetig hinsichtlich der Topologien τ. Es seien nun andere T_1-Topologien τ' gegeben, hinsichtlich derer die Morphismen aus $\mathfrak{K}$ ebenfalls stetig sind. Da jede τ-abgeschlossene Teilmenge A von X wegen (2) Urbild eines Punktes bei der natürlichen Projektion von X auf X/A ist, muß A dann auch τ'-abgeschlossen sein. Die Topologien τ besitzen daher ebenfalls die Eigenschaften (a) und (b) aus 2.7, woraus unmittelbar folgt, daß die Abbildungen h_X Homöomorphismen sind.

Der letzte Satz besagt, daß in einer T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (1) und (2) die Räume (also die Mengen und die Topologien) bis auf Homöomorphie allein durch die Struktur der Kategorie bestimmt sind. Aus dem Beweis geht hervor, daß die Voraussetzungen noch in mannigfacher Weise abgeschwächt werden können.

§ 3. Bild und Urbild

Die sehr einschränkende Bedingung (E) des vorangehenden Paragraphen soll bei den weiteren Betrachtungen durch mehrere andere Forderungen ersetzt werden.

DEFINITION 3a. *Es gelte* $f, g \in \mathrm{Hom}(., X)$.

f und g sollen äquivalent genannt werden (in Zeichen: $f \sim g$), wenn $f \downarrow g$ und $g \downarrow f$ gilt.

f und g heißen fremd (in Zeichen: $f | g$), wenn es keinen Morphismus φ mit $f \downarrow \varphi$ und $g \downarrow \varphi$ gibt.

Offenbar ist $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Außerdem folgt wegen 1.1 aus $f \sim g$ auch $(h \circ f) \sim (h \circ g)$. Ebenso folgt aus $f | g$ auch $f \circ h | g \circ h$, und die Beziehungen $f \sim g$ und $f | g$ schließen sich gegenseitig aus. Ist E ein Einsobjekt, so gilt für je zwei verschiedene Morphismen $p, q \in \mathrm{Hom}(E, X)$ wegen 2.2 stets $p | q$. Die Eigenschaft (E) besagt daher, daß je zwei verschiedene Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ durch einen Morphismus $p: E \to X$ in folgendem Sinn getrennt werden können: $f \circ p | g \circ p$. Die nachstehende Bedingung drückt nun eine entsprechende Trennungseigenschaft aus.

(T) *Zu je zwei verschiedenen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ existiert ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(., X)$ mit $f \circ \varphi | g \circ \varphi$.*

Offenbar folgt (T) aus (E). Eine weitere Folgerung aus (E) war, daß sich die Morphismen als Abbildungen auffassen ließen. Diese Konsequenz soll durch eine weitere Forderung erreicht werden, die zunächst jedoch nur eine untergeordnete Rolle spielen wird. Lediglich aus Bequemlichkeitsgründen soll sie schon jetzt gestellt werden.

(M) *Jedem Objekt X ist eine Teilmenge M_X^* der Klasse $\mathrm{Hom}(., X)$ mit folgender Eigenschaft zugeordnet: Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ existiert ein $\varphi \in M_X^*$ mit $f \sim \varphi$.*

In M_X^* definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Da M_X^* eine Menge ist, kann auf die Äquivalenzklassen von M_X^* das Auswahlaxiom angewandt werden. Es folgt, daß es dann sogar eine Teilmenge M_X von M_X^* mit der zusätzlichen Eigenschaft gibt, daß zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ nur *genau* ein $\varphi \in M_X$ mit $f \sim \varphi$ existiert. Nachfolgend sollen die Mengen M_X immer diese Bedeutung haben.

Aus (M) und (T) zusammen folgt wiederum, daß die Morphismen als Abbildungen gedeutet werden können: Es gelte nämlich $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und $\varphi \in M_X$. Dann gibt es zu $f \circ \varphi$ genau ein $\varphi' \in M_Y$ mit $(f \circ \varphi) \sim \varphi'$. Durch $\hat{f}(\varphi) = \varphi'$ wird daher eine Abbildung $\hat{f}: M_X \to M_Y$ definiert. Wieder gilt $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$. Weiter seien f und g zwei verschiedene Morphismen aus $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Wegen (T) gibt es dann ein φ mit $f \circ \varphi | g \circ \varphi$. Zu φ existiert ein $\psi \in M_X$ mit $\varphi \sim \psi$, und es gilt dann auch $f \circ \psi | g \circ \psi$. Daher können $f \circ \psi$ und $g \circ \psi$ nicht äquivalent sein; d.h. es gilt $\hat{f}(\psi) \neq \hat{g}(\psi)$, und auch $\hat{f}, \hat{g}$ sind verschiedene Abbildungen. Wie vorher wird somit durch $\Phi(X) = M_X$ und $\Phi(f) = \hat{f}$ ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf eine Kategorie $\hat{\mathfrak{K}}$ definiert, in der die Morphismen Abbildungen sind.

Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ eine Kategorie, in der die Morphismen Abbildungen sind, so kann man zunächst in $\mathrm{Hom}(., X)$ auf folgende Weise eine neue Äquivalenzbeziehung einführen: Für $f: Y \to X$ und $g: Z \to X$ gelte $f \approx g$ genau dann, wenn $f(Y) = g(Z)$ erfüllt ist. Aus $f \approx g$ folgt dann $f \sim g$. Die Äquivalenzklassen

hinsichtlich $\approx$ sind aber durch die entsprechende Bildmenge, also durch Elemente der Potenzmenge von X eindeutig gekennzeichnet. Daher entsprechen auch die Klassen hinsichtlich $\sim$ eineindeutig den Elementen einer geeigneten Menge. Dieses Entsprechen kann aber im allgemeinen nicht durch eine Abbildung beschrieben werden, weil die Äquivalenzklassen keine Mengen zu sein brauchen. Aus diesem Grund ist auch das Auswahlaxiom nicht anwendbar und die Eigenschaft (M) daher nicht auf diesem Weg ableitbar. Die Betrachtungen zeigen jedoch die nahe Verwandtschaft von (M) mit der Voraussetzung, daß die Morphismen als Abbildungen aufgefaßt werden können.

Bei den folgenden Betrachtungen wird im allgemeinen nur die Gültigkeit von (T) vorausgesetzt.

Definition 3b. *Es gelte* $f: X \to Y$. *Dann heiße ein Morphismus* $b: B \to Y$ *ein Bild von* f, *wenn* $f = b \circ k$ *gilt,* b *eine Injektion ist und* k *folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem* $g: \to B$ *gibt es Morphismen* φ *und* φ^* *mit* $g \circ \varphi = k \circ \varphi^*$.

3.1. *In* 3b *ist* k *ein Epimorphismus, der durch* f *und* b *eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von k folgt unmittelbar daraus, daß b als Injektion monomorph ist. Weiter gelte $\psi \circ k = \psi' \circ k$, es werde jedoch $\psi \neq \psi'$ angenommen. Wegen (T) gibt es dann ein χ mit $\psi \circ \chi | \psi' \circ \chi$. Zu χ existieren weiter Morphismen φ und φ^* mit $\chi \circ \varphi = k \circ \varphi^*$. Wegen $\psi \circ k = \psi' \circ k$ gilt dann auch $\psi \circ k \circ \varphi^* = \psi' \circ k \circ \varphi^*$ und somit $\psi \circ \chi \circ \varphi = \psi' \circ \chi \circ \varphi$. Im Widerspruch hierzu folgt aber aus $\psi \circ \chi | \psi' \circ \chi$ auch $\psi \circ \chi \circ \varphi | \psi' \circ \chi \circ \varphi$. Daher ist k ein Epimorphismus.

Sind b und b' zwei Bilder von f mit den zugehörigen Epimorphismen k und k', so gibt es wegen 1.8 einen Isomorphismus h mit $b' = b \circ h$ und $k = h \circ k'$. Ist umgekehrt b ein Bild von f und gilt $b' = b \circ h$ mit einem Isomorphismus h, so ist b' ein Bild von f mit dem zugehörigen Epimorphismus $k' = h^{-1} \circ k$. Zu jedem Morphismus f gibt es also bis auf Isomorphie höchstens ein Bild.

Von der Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun gefordert werden, daß in ihr jeder Morphismus mindestens ein Bild besitzt:

(B) *Jeder Morphismus besitzt mindestens ein Bild.*

3.2. *Es sei* b *ein Bild von* f. *Dann gilt* $b \sim f$.

Beweis. Wegen $f = b \circ k$ folgt $b \downarrow f$ aus 1.1 und $f \downarrow b$ aus 1.3, weil k nach 3.1 ein Epimorphismus ist.

Hiernach ist wegen (B) jeder Morphismus zu mindestens einer Injektion äquivalent. Ist umgekehrt b eine Injektion mit $b \sim f$, so ist b auch ein Bild von f: Denn wegen (B) gibt es jedenfalls ein Bild b' von f, für das dann $b \sim b'$ gilt, woraus die Isomorphie von b und b' unmittelbar folgt.

Setzt man jetzt noch die Gültigkeit von (M) voraus, so ergibt sich folgende Verschärfung: Zu jedem Objekt X gibt es eine Teilmenge J_X von $\mathrm{Hom}(., X)$, die aus lauter Injektionen besteht und die zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(., X)$ genau ein b mit $b \sim f$ enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann außerdem noch vorausgesetzt werden, daß $j \in J_X$ gilt. *Die Forderung* (M) *soll daher von jetzt an immer so verstanden werden, daß jedem Objekt* X *in eindeutiger Weise eine derartige Menge* J_X *zugeordnet ist.* Jeder Morphismus $f: \to X$ besitzt

dann genau ein Bild in J_X. Dieses ausgezeichnete Bild von f soll nachstehend immer mit $\mathrm{Im}\, f$ bezeichnet werden. Die Forderung (M) ermöglicht es also, von *dem* Bild eines Morphismus zu sprechen. Nur in diesem Sinn wird die Eigenschaft (M) bei den folgenden Betrachtungen benutzt werden. Alle Sätze gelten jedoch auch ohne Voraussetzung von (M), wenn man in ihnen unter $\mathrm{Im}\, f$ stets ein geeignetes Bild von f versteht.

Der in $f = \mathrm{Im}\, f \circ k$ jetzt bereits durch f eindeutig bestimmte Morphismus k soll der zu f gehörende *kanonische Epimorphismus* genannt werden.

3.3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ \mathrm{Im}\, f)$.

BEWEIS. Wegen 3.2 gilt $f \sim \mathrm{Im}\, f$ und daher auch $g \circ f \sim g \circ \mathrm{Im}\, f$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

3.4. *$f \downarrow g$ ist gleichwertig damit, daß es zu jedem h mit $g \downarrow h$ Morphismen φ und φ^* mit $h \circ \varphi = f \circ \varphi^*$ gibt.*

BEWEIS. Wegen $f \downarrow g$, $g \downarrow h$ und 3.2 gilt auch $\mathrm{Im}\, f \downarrow h$. Da $\mathrm{Im}\, f$ injektiv ist, folgt $h = \mathrm{Im}\, f \circ h^*$. Ist k der zu f gehörende kanonische Epimorphismus, so folgt weiter die Existenz von Morphismen φ und φ^* mit $h^* \circ \varphi = k \circ \varphi^*$. Man erhält $h \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ h^* \circ \varphi = \mathrm{Im}\, f \circ k \circ \varphi^* = f \circ \varphi^*$. Umgekehrt sei die Bedingung des Satzes erfüllt; es werde jedoch angenommen, daß $f \downarrow g$ nicht gilt. Dann gibt es Morphismen χ, χ' mit $\chi \circ f = \chi' \circ f$, aber $\chi \circ g \neq \chi' \circ g$. Wegen (T) existiert daher ein ψ mit $\chi \circ g \circ \psi \mid \chi' \circ g \circ \psi$. Wegen $g \downarrow g \circ \psi$ gibt es nach Voraussetzung Morphismen φ und φ^* mit $g \circ \psi \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es folgt $\chi \circ g \circ \psi \circ \varphi = \chi \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ f \circ \varphi^* = \chi' \circ g \circ \psi \circ \varphi$ und damit ein Widerspruch zu $\chi \circ g \circ \psi \mid \chi' \circ g \circ \psi$.

3.5. *Ein Morphismus p ist genau dann punktal, wenn $\mathrm{Im}\, p$ punktal ist. In $\mathfrak{K}$ gibt es genau dann ein Einsobjekt, wenn es in $\mathfrak{K}$ einen punktalen Morphismus gibt.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus 2.2 und 3.2. Ist E ein Einsobjekt, so ist nach 2.5 z.B. j_E ein punktaler Morphismus. Umgekehrt existiere ein punktaler Morphismus p. Wegen des ersten Teils ist dann $\mathrm{Im}\, p$ ein punktaler Monomorphismus, und nach 2.4 folgt die Existenz eines Einsobjekts.

3.6. *Es gelte $f \downarrow p$, und p sei punktal. Dann gestattet p eine Faktorisierung $p = f \circ p^*$.*

BEWEIS. Nach 3.4 gibt es Morphismen φ und φ^* mit $p \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Es gelte $\varphi: Y \to X$, und $\psi: X \to Y$ sei beliebig. Da p punktal ist, erhält man $p = p \circ j_X = p \circ \varphi \circ \psi = f \circ \varphi^* \circ \psi = f \circ p^*$ mit $p^* = \varphi^* \circ \psi$.

Nachfolgend bedeute $f \nmid g$ die Negation von $f \mid g$. Es ist also $f \nmid g$ gleichbedeutend damit, daß es ein φ mit $f \downarrow \varphi$ und $g \downarrow \varphi$ gibt.

DEFINITION 3c. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$ sei eine Injektion mit $f \nmid g$. Dann soll eine Injektion $u: \to X$ ein Urbild von g bei f genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Mit einem geeigneten u^* gilt $f \circ u = g \circ u^*$.*

(2) *Aus $f \circ h = g \circ h^*$ folgt $h = u \circ h'$.*

Da g und u Injektionen sind, sind in (1) und (2) die Morphismen u^* und h' durch u bzw. h eindeutig bestimmt. Wenn u und u_1 zwei Urbilder von g

bei f sind, gilt wegen (1) zunächst $f \circ u_1 = g \circ u_1^*$ und daher wegen (2) auch $u_1 = u \circ u_1'$. Ebenso erhält man $u = u_1 \circ u'$. Es folgt $u \circ j = u = u_1 \circ u' = u \circ u_1' \circ u'$ und weiter $u_1' \circ u' = j$, weil u ein Monomorphismus ist. Analog ergibt sich $u' \circ u_1' = j$. Wegen 1.6 sind daher u' und u_1' Isomorphismen. Zwei Urbilder sind hiernach also stets isomorph und daher auch äquivalent. Gilt umgekehrt $u \sim u_1$ und u ist ein Urbild von g bei f, so folgt zunächst die Isomorphie von u und u_1 und hieraus weiter, daß auch u_1 ein Urbild von g bei f ist.

Von der Kategorie $\mathfrak{K}$ soll nun weiter vorausgesetzt werden, daß in ihr stets Urbilder existieren:

(U) *Zu jedem $f: X \to Y$ und jeder Injektion $g: \to Y$ mit $f \natural g$ existiert mindestens ein Urbild.*

Setzt man jetzt wieder die Gültigkeit von (M) voraus, so folgt wie vorher, daß es unter allen Urbildern von g bei f ein ausgezeichnetes gibt; nämlich das in J_X liegende. Dieses soll nachstehend immer mit $f^-(g)$ bezeichnet werden. Aber auch ohne Voraussetzung von (M) behalten die folgenden Sätze ihre Gültigkeit, wenn man nur unter $f^-(g)$ ein geeignetes Urbild versteht.

3.7. *Es gelte $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, und $h: \to Z$ sei eine Injektion mit $g \circ f \natural h$. Dann gilt auch $g \natural h$, $f \natural g^-(h)$ und*

$$(g \circ f)^-(h) = f^-(g^-(h)).$$

Beweis. Wegen $g \circ f \natural h$ existiert ein φ mit $g \circ f \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$. Wegen 1.1 folgt $g \downarrow \varphi$ und $h \downarrow \varphi$, also $g \natural h$. Daher existiert $g^-(h)$, und es gilt $g \circ g^-(h) = h \circ u^*$. Zur Abkürzung werde nun $v = (g \circ f)^-(h)$ gesetzt. Wegen $g \circ (f \circ v) = (g \circ f) \circ v = h \circ v^*$ folgt dann $f \circ v = g^-(h) \circ v'$. Man erhält $f \downarrow f \circ v$ und $g^-(h) \downarrow f \circ v$, also $f \natural g^-(h)$. Daher existiert weiter $w = f^-(g^-(h))$, und es gilt $f \circ w = g^-(h) \circ w^*$. Hieraus ergibt sich erstens $(g \circ f) \circ w = g \circ g^-(h) \circ w^* = h \circ u^* \circ w^*$. Setzt man $g \circ f \circ \psi = h \circ \psi^*$ voraus, so folgt zunächst $f \circ \psi = g^-(h) \circ \psi'$ und weiter zweitens $\psi = f^-(g^-(h)) \circ \psi''$. Daher ist $f^-(g^-(h))$ ein Urbild von h bei $g \circ f$.

3.8. *Es gelte $f: X \to Y$, und $g: \to Y$, $h: \to Y$ seien Injektionen mit $g \downarrow h$ und $f \natural h$. Dann folgt auch $f \natural g$ und $f^-(g) \downarrow f^-(h)$.*

Beweis. Aus $g \downarrow h$ und $f \natural h$ folgt unmittelbar $f \natural g$. Es werde nun $\varphi \circ f^-(g) = \varphi' \circ f^-(g)$, aber $\varphi \circ f^-(h) \neq \varphi' \circ f^-(h)$ angenommen. Dann gibt es wegen (T) ein ψ mit $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$. Wegen $f \circ f^-(h) = h \circ u^*$ gilt $h \downarrow f \circ f^-(h)$, also auch $h \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$, und weiter wegen $g \downarrow h$ schließlich $g \downarrow f \circ f^-(h) \circ \psi$. Nach 3.4 existieren somit Morphismen χ und χ^* mit $f \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi^*$. Es folgt $f^-(h) \circ \psi \circ \chi = f^-(g) \circ \chi'$ und wegen der eingangs gemachten Voraussetzung $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi = \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi \circ \chi$ im Widerspruch zu $\varphi \circ f^-(h) \circ \psi \mid \varphi' \circ f^-(h) \circ \psi$.

§ 4. Summe und Produkt

Nachfolgend bedeute I stets eine Indexmenge.

Definition 4a. *Ein Objekt X heiße eine Summe der Objektmenge $\{X_\iota : \iota \in I\}$, wenn es Morphismen $\beta_\iota: X_\iota \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(1) *Zu jedem* $g: \to X$ *existiert ein Index* $\varkappa \in I$ *mit* $\beta_\varkappa \nmid g$.

(2) *Zu Morphismen* $f_\iota: X_\iota \to Y$ *existiert stets ein* $f: X \to Y$ *mit* $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$. *(*f *soll dann eine Summe der Morphismen* f_ι *genannt werden.)*

4.1. *Die Morphismen* β_ι *aus* 4a *sind injektiv.*

BEWEIS. Es sei $\varkappa$ ein fester Index. Für jedes $\iota \neq \varkappa$ sei f_ι ein beliebiger Morphismus aus $\mathrm{Hom}(X_\iota, X_\varkappa)$. Ferner gelte $f_\varkappa = j_{X_\varkappa}$. Wegen (2) gibt es dann ein $f: X \to X_\varkappa$ mit $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$. Insbesondere gilt $f \circ \beta_\varkappa = j$. Aus $\beta_\varkappa \circ \varphi = \beta_\varkappa \circ \varphi'$ folgt $\varphi = f \circ \beta_\varkappa \circ \varphi = f \circ \beta_\varkappa \circ \varphi' = \varphi'$. Daher ist $\beta_\varkappa$ monomorph. Weiter gelte $\beta_\varkappa \downarrow \psi$. Wegen $j \circ \beta_\varkappa = \beta_\varkappa \circ j = \beta_\varkappa \circ f \circ \beta_\varkappa$ folgt daraus $\psi = j \circ \psi = \beta_\varkappa \circ f \circ \psi$, und $\beta_\varkappa$ ist sogar injektiv.

4.2. *Aus* $f \circ \beta_\iota = f' \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$ *folgt* $f = f'$. *In* 4a (2) *ist daher* f *durch die Morphismen* f_ι *eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Es gelte $f \circ \beta_\iota = f' \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$ und $f \neq f'$. Wegen (T) gibt es dann ein φ mit $f \circ \varphi \mid f' \circ \varphi$. Zu φ gibt es wegen (1) einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \nmid \varphi$. Daher existiert ein ψ mit $\varphi \downarrow \psi$ und $\beta_\varkappa \downarrow \psi$. Aus der ersten Beziehung folgt $f \circ \varphi \downarrow f \circ \psi$ und $f' \circ \varphi \downarrow f' \circ \psi$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, folgt aus der zweiten Beziehung $\psi = \beta_\varkappa \circ \psi^*$, also $f \circ \psi = f \circ \beta_\varkappa \circ \psi^* = f_\varkappa \circ \psi^*$ und entsprechend $f' \circ \psi = f_\varkappa \circ \psi^*$. Im Widerspruch zu $f \circ \varphi \mid f' \circ \varphi$ gilt daher $f \circ \varphi \downarrow f_\varkappa \circ \psi^*$ und $f' \circ \varphi \downarrow f_\varkappa \circ \psi^*$.

4.3. *Es seien* X *und* X' *zwei Summen der Objektmenge* $\{X_\iota : \iota \in I\}$ *mit den zugehörigen Morphismen* β_ι *und* β'_ι. *Dann gibt es einen Isomorphismus* $h: X \to X'$ *mit* $\beta'_\iota = h \circ \beta_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

BEWEIS. Zu den Morphismen β'_ι gibt es ein $h: X \to X'$ mit $\beta'_\iota = h \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$. Ebenso gibt es ein $h': X' \to X$ mit $\beta_\iota = h' \circ \beta'_\iota$ für alle $\iota \in I$. Es gilt $h' \circ h \circ \beta_\iota = h' \circ \beta'_\iota = \beta_\iota = j \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $h' \circ h = j$. Ebenso erhält man $h \circ h' = j$. Nach 1.6 sind daher h und h' Isomorphismen.

4.4. *Es sei* X *eine Summe der Objektmenge* $\{X_\iota : \iota \in I\}$, *es gelte* $f_\iota: X_\iota \to Y$, *und* $f: X \to Y$ *sei die nach* 4.2 *eindeutig bestimmte Summe der Morphismen* f_ι. *Für ein beliebiges* $g: \to Y$ *gilt dann:*

$g \downarrow f$ *ist gleichwertig mit* $g \downarrow f_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

$g \mid f$ *ist gleichwertig mit* $g \mid f_\iota$ *für alle* $\iota \in I$.

BEWEIS. Wegen $f_\iota = f \circ \beta_\iota$ erhält man $f \downarrow f_\iota$. Aus $g \downarrow f$ folgt daher $g \downarrow f_\iota$ für alle $\iota \in I$. Umgekehrt sei $g \downarrow f_\iota$ für alle $\iota \in I$ erfüllt. Aus $\varphi \circ g = \varphi' \circ g$ folgt dann $\varphi \circ f \circ \beta_\iota = \varphi \circ f_\iota = \varphi' \circ f_\iota = \varphi' \circ f \circ \beta_\iota$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$ und somit $g \downarrow f$.

Aus $g \nmid f_\varkappa$ für einen Index $\varkappa \in I$ folgt wegen $f \downarrow f_\varkappa$ auch $g \nmid f$. Umgekehrt gelte $g \nmid f$. Es gibt also ein ψ mit $g \downarrow \psi$ und $f \downarrow \psi$. Wegen der zweiten Beziehung und wegen 3.4 existieren Morphismen φ und φ^* mit $\psi \circ \varphi = f \circ \varphi^*$. Wegen der ersten Beziehung gilt auch $g \downarrow f \circ \varphi^*$. Zu φ^* gibt es nach 4a (1) einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \nmid \varphi^*$; d.h. es gibt ein χ mit $\varphi^* \downarrow \chi$ und $\beta_\varkappa \downarrow \chi$. Aus der ersten Beziehung folgt $f \circ \varphi^* \downarrow f \circ \chi$ und daher auch $g \downarrow f \circ \chi$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, ergibt sich aus der zweiten Beziehung $\chi = \beta_\varkappa \circ \chi^*$, also $f \circ \chi = f \circ \beta_\varkappa \circ \chi^* = f_\varkappa \circ \chi^*$. Zusammen folgt hieraus $g \nmid f_\varkappa$.

Hinsichtlich der Summenbildung soll nun an die Kategorie $\mathfrak{K}$ folgende Forderung gestellt werden:

(S) *Zu jeder Objektmenge gibt es in* $\mathfrak{K}$ *mindestens eine Summe.*

Zu jeder Menge von Morphismen $f_\iota: X_\iota \to Y$ gibt es dann mindestens einen Summenmorphismus f, der jedoch noch von der Wahl der jeweiligen Summe der Objektmenge abhängt. Wegen 4.3 unterscheiden sich jedoch zwei Summenmorphismen immer nur um einen Isomorphismus und sind somit äquivalent. Wenn man daher außerdem die Gültigkeit von (M) voraussetzt, ist das Bild $\operatorname{Im} f$ nicht mehr von der Wahl des Summenmorphismus abhängig, sondern durch die Morphismen f_ι eindeutig bestimmt. Wegen 4.4 gilt $\operatorname{Im} f \downarrow f_\iota$ für alle ι, und aus $g \downarrow f_\iota$ für alle ι folgt $g \downarrow \operatorname{Im} f$. Daher soll $\operatorname{Im} f$ auch der Vereinigungsmorphismus der Morphismen f_ι genannt und mit $\vee f_\iota$ bezeichnet werden.

In $\operatorname{Hom}(.,X)$ definiert $\downarrow$ im allgemeinen keine Ordnungsrelation, weil aus $f \downarrow g$ und $g \downarrow f$ nur $f \sim g$, nicht aber $f = g$ folgt. Sind bei Voraussetzung von (M) jedoch f und g Morphismen aus J_X, so folgt aus $f \sim g$ sogar $f = g$. In J_X induziert also $\downarrow$ eine Ordnungsrelation. Für Morphismen $f, g \in J_X$ soll daher statt $f \downarrow g$ auch $g \leqq f$ geschrieben werden. Für jede Menge von Morphismen $f_\iota \in J_X$ ist dann $\vee f_\iota$ gerade die ordnungstheoretische Vereinigung. Erweitert man J_X noch durch ein Nullelement 0, indem man $0 \leqq f$ für jedes $f \in J_X$ definiert, so ist die so erweiterte geordnete Menge J_X^* ein vollständiger Verband: Aus der Existenz beliebiger Vereinigungen folgt nämlich bekanntlich auch die Existenz beliebiger Durchschnitte. Insbesondere ist in J_X^* die Beziehung $f \mid g$ gleichwertig mit $f \wedge g = 0$.

4.5. $\operatorname{Im}(h \circ \vee f_\iota) = \vee (h \circ f_\iota)$.

Beweis. Es gelte $f_\iota: X_\iota \to Y$, und X sei eine Summe der Objekte X_ι mit den zugehörigen Morphismen β_ι. Ist dann f die entsprechende Summe der f_ι, so gilt $\vee f_\iota \sim f$. Wegen $h \circ f \circ \beta_\iota = h \circ f_\iota$ für alle ι ist $h \circ f$ eine Summe der Morphismen $h \circ f_\iota$. Daher gilt weiter $h \circ f \sim \vee (h \circ f_\iota)$, wegen $h \circ f \sim h \circ \vee f_\iota$ also auch $\vee (h \circ f_\iota) \sim h \circ \vee f_\iota$. Hieraus folgt die behauptete Gleichung.

4.6. *Es gelte* $f: X \to Y$. *Ferner seien* $g_\iota: Z_\iota \to Y$ *Injektionen mit* $f \nmid g_\iota$ *für alle* $\iota \in I$. *Dann gilt*

$$f^-(\vee g_\iota) = \vee f^-(g_\iota).$$

Beweis. Wegen 4.4 gilt auch $f \nmid \vee g_\iota$. Neben den Urbildern $f^-(g_\iota)$ existiert daher auch $f^-(\vee g_\iota)$.

Es sei Z eine Summe der Objekte Z_ι mit den zugehörigen Morphismen β_ι. Ferner sei g die durch Z eindeutig bestimmte Summe der Morphismen g_ι, und k sei der zu g gehörende kanonische Epimorphismus. Es gilt also $g = \operatorname{Im} g \circ k$ und $\operatorname{Im} g = \vee g_\iota$. Weiter sei $u_\iota = f^-(g_\iota)$ mit $u_\iota: Z'_\iota \to X$ und Z' eine Summe der Objekte Z'_ι mit den zugehörigen Morphismen β'_ι. Schließlich sei u die durch Z' bestimmte Summe der Morphismen u_ι, und k' sei der zu u gehörende kanonische Epimorphismus. Wieder gilt $u = \operatorname{Im} u \circ k'$ und $\operatorname{Im} u = \vee f^-(g_\iota)$.

Wegen $u_\iota = f^-(g_\iota)$ gilt $f \circ u_\iota = g_\iota \circ u_\iota^*$. Bedeutet h die durch Z' bestimmte Summe der Morphismen $\beta_\iota \circ u_\iota^*$, so erhält man $h \circ \beta'_\iota = \beta_\iota \circ u_\iota^*$. Es folgt

$g \circ h \circ \beta_\iota' = g \circ \beta_\iota \circ u_\iota^* = g_\iota \circ u_\iota^* = f \circ u_\iota = f \circ u \circ \beta_\iota'$ für alle $\iota \in I$, wegen 4.2 also $g \circ h = f \circ u$ und weiter $\mathrm{Im}\, g \circ k \circ h = f \circ \mathrm{Im}\, u \circ k'$. Es ergibt sich $\mathrm{Im} g \downarrow f \circ \mathrm{Im} u \circ k'$ und wegen 1.3 (k' ist epimorph) auch $\mathrm{Im} g \downarrow f \circ \mathrm{Im} u$. Da $\mathrm{Im} u$ injektiv ist, folgt $f \circ \mathrm{Im} u = \mathrm{Im} g \circ f^*$.

Um zu zeigen, daß $\mathrm{Im} u$ das Urbild von $\mathrm{Im} g$ bei f ist, muß nur noch bewiesen werden, daß aus $f \circ t = \mathrm{Im} g \circ t^*$ eine Faktorisierung $t = \mathrm{Im} u \circ t'$, oder gleichwertig $\mathrm{Im} u \downarrow t$ folgt. Zu diesem Zweck werde $\varphi \circ \mathrm{Im} u = \varphi' \circ \mathrm{Im} u$, aber $\varphi \circ t \neq \varphi' \circ t$ vorausgesetzt. Wegen (T) gibt es ein ψ mit $\varphi \circ t \circ \psi | \varphi' \circ t \circ \psi$. Zu $t^* \circ \psi$ existieren Morphismen α und α^* mit $t^* \circ \psi \circ \alpha = k \circ \alpha^*$. Zu α^* gibt es weiter einen Index $\varkappa$ mit $\beta_\varkappa \dagger \alpha^*$, also ein γ mit $\alpha^* \downarrow \gamma$ und $\beta_\varkappa \downarrow \gamma$. Da $\beta_\varkappa$ nach 4.1 injektiv ist, folgt $\gamma = \beta_\varkappa \circ \gamma^*$. Wegen 3.2 gilt auch $\mathrm{Im}\, \alpha^* \downarrow \gamma$ und daher ($\mathrm{Im}\, \alpha^*$ ist injektiv) $\gamma = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ \gamma'$. Bedeutet k^* den zu α^* gehörenden kanonischen Epimorphismus, so gibt es Morphismen δ und δ^* mit $\gamma' \circ \delta = k^* \circ \delta^*$. Es folgt

$$\alpha^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ k^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, \alpha^* \circ \gamma' \circ \delta = \gamma \circ \delta$$

und weiter

$$g_\varkappa \circ \gamma^* \circ \delta = g \circ \beta_\varkappa \circ \gamma^* \circ \delta = g \circ \gamma \circ \delta = g \circ \alpha^* \circ \delta^* = \mathrm{Im}\, g \circ k \circ \alpha^* \circ \delta^*$$
$$= \mathrm{Im}\, g \circ t^* \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = f \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^*.$$

Wegen $u_\varkappa = f^-(g_\varkappa)$ ergibt sich hieraus $t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = u_\varkappa \circ \zeta = \mathrm{Im} u \circ k' \circ \beta_\varkappa' \circ \zeta$. Nun gilt aber $\varphi \circ \mathrm{Im} u = \varphi' \circ \mathrm{Im} u$, wegen der letzten Gleichung also auch $\varphi \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^* = \varphi' \circ t \circ \psi \circ \alpha \circ \delta^*$. Dies ist ein Widerspruch zu $\varphi \circ t \circ \psi | \varphi' \circ t \circ \psi$.

DEFINITION 4b. *Ein Objekt Y soll ein Produkt der Objektmenge $\{Y_\iota : \iota \in I\}$ genannt werden, wenn es Morphismen $\pi_\iota : Y \to Y_\iota$ mit folgender Eigenschaft gibt:*

Zu Morphismen $f_\iota : X \to Y_\iota$ gibt es genau ein $f : X \to Y$ mit $f_\iota = \pi_\iota \circ f$ für alle $\iota \in I$.

Der in dieser Definition auftretende Morphismus f soll ein *Produkt* der Morphismen f_ι genannt werden. Da er definitionsgemäß durch das Produkt Y eindeutig bestimmt ist, ergibt sich ebenso wie im Beweis von 4.3, daß je zwei Produkte einer Objektmenge isomorph sind. Entsprechend ergibt sich durch Dualisierung des Beweises von 4.1 unmittelbar:

4.7. *Die Morphismen π_ι aus* 4b *sind surjektiv.*

Statt der Eigenschaft (S) soll nun von der Kategorie $\mathfrak{K}$ die folgende, im wesentlichen duale Eigenschaft gefordert werden:

(P) *Zu jeder Objektmenge existiert in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Produkt.*

Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß auch mit Hilfe dieser Eigenschaft die Existenz von beliebigen Durchschnitten und Vereinigungen nachgewiesen werden kann.

4.8. *Zu den Injektionen $f_\iota : X_\iota \to Y$ ($\iota \in I$) existiere ein ψ mit $f_\iota \downarrow \psi$ für alle $\iota \in I$. Dann gibt es eine Injektion $d : \to Y$ mit folgenden Eigenschaften, durch die sie bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist:*

(a) *$f_\iota \downarrow d$ für alle $\iota \in I$.*

(b) *Aus $f_\iota \downarrow g$ für alle $\iota \in I$ folgt $d \downarrow g$.*

Beweis. Es gelte $Z_\iota = Y$ für alle Indizes $\iota \in I$, und Y^* sei ein Produkt der Objektmenge $\{Z_\iota : \iota \in I\}$ mit den zugehörigen Morphismen π_ι^*. Dann gibt es genau ein $h: Y \to Y^*$ mit $\pi_\iota^* \circ h = j$ für alle ι. Wegen 1.2 ist h außerdem ein Monomorphismus. Weiter sei X ein Produkt der Objektmenge $\{X_\iota : \iota \in I\}$ mit den zugehörigen Morphismen π_ι. Dann gibt es genau ein $f: X \to Y^*$ mit $f_\iota \circ \pi_\iota = \pi_\iota^* \circ f$ für alle ι. Da die f_ι injektiv sind, folgt aus $f_\iota \downarrow \psi$ eine Faktorisierung $\psi = f_\iota \circ \psi_\iota^*$. Zu den Morphismen ψ_ι^* gibt es genau ein $\psi^*: \to X$ mit $\psi_\iota^* = \pi_\iota \circ \psi^*$ für alle ι. Man erhält $\pi_\iota^* \circ f \circ \psi^* = f_\iota \circ \pi_\iota \circ \psi^* = f_\iota \circ \psi_\iota^* = \psi = j \circ \psi = \pi_\iota^* \circ h \circ \psi$ für alle ι und daher $f \circ \psi^* = h \circ \psi$. Es folgt $f \downarrow f \circ \psi^*$ und $h \downarrow f \circ \psi^*$, also $f \nmid h$. Daher existiert ein Urbild u von h bei f, und es gilt $f \circ u = h \circ d$ mit einem geeigneten Morphismus d. Wegen $\pi_\iota^* \circ h = j$ ergibt sich außerdem $d = \pi_\iota^* \circ h \circ d = \pi_\iota^* \circ f \circ u$ bei beliebiger Wahl des Index ι. Wegen $\pi_\iota^* \circ f = f_\iota \circ \pi_\iota$ gilt $d = f_\iota \circ \pi_\iota \circ u$ und daher $f_\iota \downarrow d$ für alle $\iota \in I$; d.h. es gilt (a).

Es werde jetzt $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$ vorausgesetzt. Für jeden Index ι gilt dann $f_\iota \circ \pi_\iota \circ \varphi = \pi_\iota^* \circ f \circ \varphi = \pi_\iota^* \circ f \circ \varphi' = f_\iota \circ \pi_\iota \circ \varphi'$ und weiter auch $\pi_\iota \circ \varphi = \pi_\iota \circ \varphi'$, weil f_ι als Injektion monomorph ist. Da dies für jeden Index ι gilt, folgt $\varphi = \varphi'$; d.h. f ist monomorph. Da auch u als Urbild und h monomorph sind, muß wegen $h \circ d = f \circ u$ ebenfalls $h \circ d$ und weiter d monomorph sein. Wenn nun $f_\iota \downarrow g$ für alle $\iota \in I$ erfüllt ist (wegen (a) folgt dies speziell aus $d \downarrow g$), erhält man in derselben Weise wie oben eine Faktorisierung $h \circ g = f \circ g^*$. Daher gestattet g^* eine Faktorisierung $g^* = u \circ g'$, und bei beliebiger Wahl von ι erhält man $g = \pi_\iota^* \circ h \circ g = \pi_\iota^* \circ f \circ g^* = \pi_\iota^* \circ f \circ u \circ g' = d \circ g'$. Hieraus folgt einerseits $d \downarrow g$, also Eigenschaft (b). Andererseits folgt aber auch, daß d injektiv ist.

Daß in dem letzten Satz die Morphismen f_ι als Injektionen vorausgesetzt wurden, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit: Sind nämlich die Morphismen f_ι beliebig, so ersetze man sie durch ihre Bilder $\operatorname{Im} f_\iota$. Auf diese ist dann der Satz anwendbar, und die resultierende Injektion d besitzt wegen $f_\iota \sim \operatorname{Im} f_\iota$ (3.2) die Eigenschaften (a) und (b) auch hinsichtlich der Morphismen f_ι.

Bei dem letzten Schluß wurde die Eigenschaft (M) noch nicht benutzt, weil man statt der ausgezeichneten Bilder $\operatorname{Im} f_\iota$ natürlich auch irgendwelche anderen Bilder der f_ι benutzen kann. Setzt man jetzt jedoch die Gültigkeit von (M) voraus, so besitzt auch $\operatorname{Im} d$ die Eigenschaften (a) und (b). Es soll daher $\operatorname{Im} d$ der Durchschnitt der Morphismen f_ι genannt und mit $\wedge f_\iota$ bezeichnet werden. Ebenso wie vorher ergibt sich, daß in der geordneten Menge J_Y^* der Morphismus $\wedge f_\iota$ gerade der ordnungstheoretische Durchschnitt ist und daß J_Y^* daher ein vollständiger Verband ist. Hinsichtlich der Verbandsstruktur von J_Y^* sind also die Forderungen (S) und (P) gleichberechtigt.

Setzt man statt (P) wieder (S), aber nicht (M) voraus, so kann die Existenz von d in 4.8 nicht gefolgert werden: Hierzu müßte man nämlich die Summe aller Morphismen g bilden können, die die Eigenschaft $f_\iota \downarrow g$ für alle Indizes ι besitzen. Diese Morphismen bilden aber im allgemeinen keine Menge. Die Summenbildung war jedoch nur für Mengen von Morphismen definiert.

4.9. *Aus $\wedge g_\iota \nmid f$ folgt $f^-(\wedge g_\iota) = \wedge f^-(g_\iota)$. Hierbei seien die Morphismen g_ι Injektionen.*

BEWEIS. Es werde $d=\wedge g_\iota$, $u_\iota=f^-(g_\iota)$ und $\delta=\wedge u_\iota$ gesetzt. Es gilt $f\circ u_\iota=g_\iota\circ u_\iota^*$. Da u_ι injektiv ist, erhält man wegen $u_\iota\downarrow\delta$ außerdem $\delta=u_\iota\circ\delta_\iota^*$ und somit $f\circ\delta=f\circ u_\iota\circ\delta_\iota^*=g_\iota\circ u_\iota^*\circ\delta_\iota^*$. Es folgt $g_\iota\downarrow f\circ\delta$ für alle Indizes ι, also auch $d\downarrow f\circ\delta$. Da d injektiv ist, ergibt sich schließlich $f\circ\delta=d\circ\delta^*$.

Zum Nachweis der zweiten Eigenschaft des Urbildes werde $f\circ h=d\circ h^*$ vorausgesetzt. Da die Morphismen g_ι injektiv sind, folgt wegen $g_\iota\downarrow d$ auch $d=g_\iota\circ d_\iota^*$ und somit $f\circ h=d\circ h^*=g_\iota\circ d_\iota^*\circ h^*$. Hieraus folgt weiter $h=u_\iota\circ h'_\iota$, also $u_\iota\downarrow h$ für alle Indizes ι, und somit $\delta\downarrow h$. Da δ injektiv ist, ergibt sich schließlich $h=\delta\circ h''$. Daher ist δ das Urbild von d bei f.

Die Existenz der Durchschnitte je endlich vieler Morphismen aus J_X kann auch ohne Voraussetzung von (S) oder (P) nachgewiesen werden:

4.10. *Es gelte $f, g\in J_X$ und $f\nmid g$. Dann ist $d=f\circ f^-(g)$ eine Injektion, und es gilt*

$$\mathrm{Im}\,(f\circ f^-(g))=f\wedge g=\mathrm{Im}\,(g\circ g^-(f)).$$

BEWEIS. Aus $d=f\circ f^-(g)$ folgt $f\downarrow d$, und wegen $f\circ f^-(g)=g\circ u^*$ erhält man auch $g\downarrow d$. Aus $f\downarrow h$ und $g\downarrow h$ folgt, weil f und g Injektionen sind, $h=f\circ h'=g\circ h''$ und weiter $h'=f^-(g)\circ h^*$. Daher gilt $h=f\circ f^-(g)\circ h^*=d\circ h^*$ und somit $d\downarrow h$. Aus beiden Ergebnissen zusammen folgt $\mathrm{Im}\,(f\circ f^-(g))=f\wedge g$. Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen können hier noch die Rollen von f und g vertauscht werden. Mit f und $f^-(g)$ ist nach 1.1 auch d ein Monomorphismus. Aus $d\downarrow h$ folgt $f\downarrow h$ und $g\downarrow h$ und ebenso wie vorher $h=d\circ h^*$. Daher ist d sogar injektiv.

Setzt man von der Kategorie $\mathfrak{K}$ neben den Eigenschaften (T), (M), (B) und (U) lediglich noch voraus, daß (S) für endliche Objektmengen gilt, daß also in J_X die Vereinigung je endlich vieler Morphismen existiert, so ist wegen des letzten Satzes auch dann J_X^* ein Verband (allerdings kein vollständiger Verband). Der nächste Satz zeigt, daß dieser Verband sogar distributiv ist.

4.11. *Für die Morphismen $f_1, f_2, g\in J_X$ gelte $g\wedge f_1\neq 0$ und $g\wedge f_2\neq 0$. Dann folgt*

$$g\wedge(f_1\vee f_2)=(g\wedge f_1)\vee(g\wedge f_2).$$

BEWEIS. Es muß nur $(g\wedge f_1)\vee(g\wedge f_2)\downarrow g\wedge(f_1\vee f_2)$ bewiesen werden.

Zur Abkürzung werde $f_1\vee f_2=u$, $g\wedge u=d$, $g\wedge f_1=v_1$, $g\wedge f_2=v_2$ und $v_1\vee v_2=v$ gesetzt. Es muß also $v\downarrow d$ bewiesen, oder gleichwertig die Annahme $\varphi\circ v=\varphi'\circ v$ und $\varphi\circ d\neq\varphi'\circ d$ widerlegt werden. Wegen (T) gibt ein ψ mit $\varphi\circ d\circ\psi\,|\,\varphi'\circ d\circ\psi$. Wegen $d=g\wedge u$ gilt $d=g\circ d'=u\circ d''$. Es sei nun s eine Summe von f_1 und f_2. Man erhält $u=\mathrm{Im}\,s$, und es gibt Morphismen χ und χ^* mit $u\circ d''\circ\psi\circ\chi=s\circ\chi^*$. Für mindestens einen der beiden zu der Summe gehörenden Morphismen β_1, β_2 — etwa für β_1 — gilt $\beta_1\nmid\chi^*$. Es existieren daher weiter Morphismen μ und μ^* mit $\chi^*\circ\mu=\beta_1\circ\mu^*$. Mit $\psi\circ\chi\circ\mu=\omega$ folgt jetzt $d\circ\omega=g\circ d'\circ\omega$ und

$$d\circ\omega=u\circ d''\circ\omega=s\circ\chi^*\circ\mu=s\circ\beta_1\circ\mu^*=f_1\circ\mu^*,$$

also $g\downarrow d\circ\omega$ und $f_1\downarrow d\circ\omega$. Hieraus ergibt sich weiter $v_1\downarrow d\circ\omega$ und erst recht $v\downarrow d\circ\omega$. Wegen $\varphi\circ v=\varphi'\circ v$ müßte auch $\varphi\circ d\circ\omega=\varphi'\circ d\circ\omega$ gelten, was $\varphi\circ d\circ\psi\,|\,\varphi'\circ d\circ\psi$ widerspricht.

§ 5. T_1-Kategorien

In diesem Paragraphen bedeute $\mathfrak{K}$ eine Kategorie, die neben den Eigenschaften (T), (M), (B) und (U) noch eine der Eigenschaften (S) oder (P) erfüllt, oder zumindest (S) für endliche Objektmengen. In jedem Fall sind dann die Mengen J_X^* hinsichtlich $\downarrow$ als Ordnungsrelation distributive Verbände.

Definition 5a. *Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{a}$ von J_X soll ein P-Filter genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Aus $f\in\mathfrak{a}$, $g\in J_X$ und $f\leqq g$ folgt $g\in\mathfrak{a}$.*

(2) *Aus $f, g\in\mathfrak{a}$ folgt $f\wedge g\in\mathfrak{a}$.*

(3) *Aus $f, g\in J_X$ und $f\vee g\in\mathfrak{a}$ folgt $f\in\mathfrak{a}$ oder $g\in\mathfrak{a}$.*

Die Eigenschaften (1) und (2) kennzeichnen $\mathfrak{a}$ als Filter von J_X^*. Wegen $\mathfrak{a}\subseteqq J_X$ gilt $0\notin\mathfrak{a}$ und für $f, g\in\mathfrak{a}$ wegen (2) insbesondere $f\wedge g\neq 0$.

5.1. *Zu jedem $h\in J_X$ gibt es einen P-Filter $\mathfrak{a}$ mit $h\in\mathfrak{a}$.*

Beweis. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas folgt unmittelbar die Existenz einer maximalen Teilmenge $\mathfrak{a}$ von J_X mit $h\in\mathfrak{a}$ und mit den Eigenschaften (1) und (2) aus 5a. ($\mathfrak{a}$ ist ein Ultrafilter des Verbandes J_X^*.) Es gelte nun $f\vee g\in\mathfrak{a}$ mit $f, g\in J_X$, aber $f\notin\mathfrak{a}$ und $g\notin\mathfrak{a}$. Aus $f\wedge f^*\neq 0$ für alle $f^*\in\mathfrak{a}$ würde wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}$ auch $f\in\mathfrak{a}$ folgen. Daher gibt es ein $f^*\in\mathfrak{a}$ mit $f\wedge f^*=0$. Ebenso existiert ein $g^*\in\mathfrak{a}$ mit $g\wedge g^*=0$. Setzt man $d^*=f^*\wedge g^*$, so gilt wegen (2) auch $d^*\in\mathfrak{a}$ und nach 4.11 außerdem $d^*\wedge(f\vee g)=(d^*\wedge f)\vee(d^*\wedge g)=0$ im Widerspruch zu $f\vee g\in\mathfrak{a}$.

Aus diesem Beweis folgt noch, daß allgemein jeder Ultrafilter des Verbandes J_X^* ein P-Filter ist. Umgekehrt braucht aber ein P-Filter kein Ultrafilter zu sein, weil J_X^* im allgemeinen kein komplementärer Verband ist.

5.2. *Es sei $p\colon\to X$ ein punktaler Morphismus. Dann ist*

$$\mathfrak{a}=\{f\colon f\in J_X,\ f\downarrow p\}$$

ein P-Filter.

Beweis. Wegen $\mathrm{Im}\,p\in J_X$ gibt es nach 5.1 einen P-Filter $\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Im}\,p\in\mathfrak{b}$. Aus $f\in\mathfrak{a}$, also $f\downarrow p$, folgt wegen 3.2 auch $f\geqq\mathrm{Im}\,p$ und somit $f\in\mathfrak{b}$. Umgekehrt gelte $f\in\mathfrak{b}$. Wegen $\mathrm{Im}\,p\in\mathfrak{b}$ ist dann $d=f\wedge\mathrm{Im}\,p$ ein Morphismus aus $\mathfrak{b}$. Da nach 3.5 auch $\mathrm{Im}\,p$ ein punktaler Morphismus ist, gilt wegen $\mathrm{Im}\,p\downarrow d$ und wegen 2.2 umgekehrt $d\downarrow\mathrm{Im}\,p$, erst recht also $f\downarrow\mathrm{Im}\,p$. Wegen 3.2 ergibt sich $f\downarrow p$, also $f\in\mathfrak{a}$. Daher gilt $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{a}$ selbst ist ein P-Filter.

5.3. *Es gelte $h\colon X\to Y$, und $\mathfrak{a}\subseteqq J_X$ sei ein P-Filter. Dann ist auch*

$$\mathfrak{a}_h=\{f'\colon f'\in J_Y,\ f'\nmid h,\ h^-(f')\in\mathfrak{a}\}$$

ein P-Filter in J_Y.

Beweis. Aus $f'\in\mathfrak{a}_h$ und $f'\leqq g'$ folgt wegen 3.8 auch $g'\nmid h$ und $h^-(f')\leqq h^-(g')$. Wegen $h^-(f')\in\mathfrak{a}$ erhält man $h^-(g')\in\mathfrak{a}$, also $g'\in\mathfrak{a}_h$. Zweitens gelte $f', g'\in\mathfrak{a}_h$. Wegen 4.9 folgt dann $h^-(f'\wedge g')=h^-(f')\wedge h^-(g')\in\mathfrak{a}$ und daher $f'\wedge g'\in\mathfrak{a}_h$. Schließlich werde $f', g'\in J_Y$ und $f'\vee g'\in\mathfrak{a}_h$ vorausgesetzt. Wegen 4.6 erhält man dann $h^-(f')\vee h^-(g')=h^-(f'\vee g')\in\mathfrak{a}$. Es folgt $h^-(f')\in\mathfrak{a}$ oder $h^-(g')\in\mathfrak{a}$, also $f'\in\mathfrak{a}_h$ oder $g'\in\mathfrak{a}_h$.

Es bezeichne jetzt $\widetilde{X}$ die Menge aller P-Filter von J_X. (Da J_X eine Menge ist, muß auch $\widetilde{X}$ als Teilmenge der Potenzmenge von J_X eine Menge sein.) Nach dem letzten Satz bestimmt dann jeder Morphismus $h: X \to Y$ eindeutig die durch $\tilde{h}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_h$ definierte Abbildung $\tilde{h}: \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$. Wegen 3.7 gilt offenbar $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

5.4. *Aus $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ und $f \neq g$ folgt $\tilde{f} \neq \tilde{g}$.*

BEWEIS. Wegen (T) gibt es ein φ mit $f \circ \varphi \mid g \circ \varphi$. Nach 5.1 existiert weiter ein P-Filter $\mathfrak{a} \in \widetilde{X}$ mit $\mathrm{Im}\varphi \in \mathfrak{a}$. Wegen $f^{-}(\mathrm{Im}(f \circ \varphi)) \geqq \mathrm{Im}\varphi$ erhält man $f^{-}(\mathrm{Im}(f \circ \varphi)) \in \mathfrak{a}$, also $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \in \tilde{f}(\mathfrak{a})$. Ebenso ergibt sich $\mathrm{Im}(g \circ \varphi) \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$. Da aber wegen $f \circ \varphi \mid g \circ \varphi$ auch $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) \wedge \mathrm{Im}(g \circ \varphi) = 0$ gilt, kann $\mathrm{Im}(g \circ \varphi)$ nicht in $\tilde{f}(\mathfrak{a})$ liegen. Es folgt $\tilde{f}(\mathfrak{a}) \neq \tilde{g}(\mathfrak{a})$, also $\tilde{f} \neq \tilde{g}$.

Die neuen Objekte $\widetilde{X}$ und die Mengen $\mathrm{Hom}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \{\tilde{f}: f \in \mathrm{Hom}(X, Y)\}$ bilden hinsichtlich der Hintereinanderschaltung der Abbildungen als Komposition eine Kategorie $\widetilde{\mathfrak{K}}$. Diese ist zu $\mathfrak{K}$ isomorph, weil wegen 5.4 durch $\Phi(X) = \widetilde{X}$ und $\Phi(f) = \tilde{f}$ ein eineindeutiger Funktor Φ von $\mathfrak{K}$ auf $\widetilde{\mathfrak{K}}$ definiert wird.

Da jeder Morphismus $\tilde{h}: \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$ eine Abbildung ist, ist seine Bildmenge $\tilde{h}(\widetilde{X})$ definiert. Sie soll nachfolgend mit $\mathrm{Bd}\tilde{h}$ bezeichnet werden.

5.5. *$\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$ ist gleichwertig mit $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$.*

BEWEIS. Es gelte $h: X \to Y$. Aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$ folgt die Existenz eines P-Filters $\mathfrak{b} \in \widetilde{X}$ mit $\tilde{h}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$. Wegen $j_X \in \mathfrak{b}$ und $j_X = h^{-}(\mathrm{Im}h)$ erhält man (vgl. 5.3) $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$. Umgekehrt werde jetzt $\mathrm{Im}h \in \mathfrak{a}$ vorausgesetzt. Dann gilt $h \nmid f$ für alle $f \in \mathfrak{a}$, und $\{h^{-}(f): f \in \mathfrak{a}\}$ ist Basis eines Filters $\mathfrak{b}$ des Verbandes J_X^*. Ein einfacher Wohlordnungsschluß liefert die Existenz eines Filters $\mathfrak{c}$ in J_X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{c}$.

(b) Aus $f' \in \mathfrak{c}$ folgt $\mathrm{Im}(h \circ f') \in \mathfrak{a}$.

(c) Aus $g' \in J_X$ und $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$ folgt $g' \in \mathfrak{c}$.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{c}$ sogar ein P-Filter ist, werde weiter $g_1' \vee g_2' \in \mathfrak{c}$ vorausgesetzt. Dann gilt $f' \wedge (g_1' \vee g_2') \in \mathfrak{c}$ und wegen 4.11 auch $(f' \wedge g_1') \vee (f' \wedge g_2') \in \mathfrak{c}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Wegen (b) und 4.5 folgt weiter $[h \circ (f' \wedge g_1')] \vee [h \circ (f' \wedge g_2')] \in \mathfrak{a}$ und daher $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Nimmt man $\mathrm{Im}(h \circ (f_1' \wedge g_1')) \notin \mathfrak{a}$ und $\mathrm{Im}(h \circ (f_2' \wedge g_2')) \notin \mathfrak{a}$ mit geeigneten Morphismen $f_1', f_2' \in \mathfrak{c}$ an und setzt $f' = f_1' \wedge f_2'$, so gilt $f' \in \mathfrak{c}$ und nach dem soeben Bewiesenen $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$, im Widerspruch zur Annahme also auch $\mathrm{Im}(h \circ (f_1' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f_2' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$. Daher folgt sogar $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_1')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$ oder $\mathrm{Im}(h \circ (f' \wedge g_2')) \in \mathfrak{a}$ für alle $f' \in \mathfrak{c}$. Somit ist $\mathfrak{c}$ ein P-Filter. Unmittelbar erhält man $\tilde{h}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{h}$.

5.6. *In $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ist $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ gleichwertig mit $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteqq \mathrm{Bd}\tilde{f}$.*

BEWEIS. Aus $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteqq \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und der Definition von $\downarrow$ folgt unmittelbar $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$. Weiter werde angenommen, daß $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ gilt, aber $\mathrm{Bd}\tilde{g} \subseteqq \mathrm{Bd}\tilde{f}$ nicht erfüllt ist.

Dann gibt es einen P-Filter $\mathfrak{a}$ mit $\tilde{g}(\mathfrak{a}) \notin \mathrm{Bd}\tilde{f}$. Wegen 5.5 folgt $\mathrm{Im}f \notin \tilde{g}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{Im}g \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$. Da $\mathfrak{K}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$ isomorph sind, folgt aus $\tilde{f} \downarrow \tilde{g}$ auch $f \downarrow g$ und nach 3.2 weiter $\mathrm{Im}f \downarrow \mathrm{Im}g$. Wegen $\mathrm{Im}g \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$ ergibt sich hieraus der Widerspruch $\mathrm{Im}f \in \tilde{g}(\mathfrak{a})$.

5.7. $\mathrm{Bd}(\mathrm{Im}\tilde{f}) = \mathrm{Bd}\tilde{f}$.

Beweis. Wegen der Isomorphie von $\mathfrak{K}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$ gilt $\mathrm{Im}\tilde{f} = \widetilde{\mathrm{Im}f}$. Aus $\mathrm{Im}(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}f$ und 5.5 folgt daher unmittelbar die Behauptung.

5.8. *Für $f, g \in J_X$ mit $f \wedge g \neq 0$ gilt*

$$\mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) = (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) = (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g}).$$

Beweis. Wegen 5.6 ergibt sich unmittelbar $\mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g}) \subseteq (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g})$ und $\mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g}) \supseteq (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g})$. Weiter gelte $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cap (\mathrm{Bd}\tilde{g})$. Wegen $f, g \in J_X$ gilt $f = \mathrm{Im}f$, $g = \mathrm{Im}g$ usw. Wegen 5.5 folgt daher $f \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{a}$, also auch $f \wedge g \in \mathfrak{a}$ und somit ($\mathfrak{K}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$ sind isomorph) $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{f} \wedge \tilde{g})$. Entsprechend folgt aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{f} \vee \tilde{g})$ zunächst $f \vee g \in \mathfrak{a}$, also ($\mathfrak{a}$ ist ein P-Filter) $f \in \mathfrak{a}$ oder $g \in \mathfrak{a}$ und daher $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\tilde{f}) \cup (\mathrm{Bd}\tilde{g})$.

Da ein Morphismus $\tilde{h}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ gleichzeitig eine Abbildung ist, existiert zu jeder Teilmenge $\tilde{M}$ von $\tilde{Y}$ die Urbildmenge hinsichtlich $\tilde{h}$. Zur Unterscheidung von dem Urbild-Morphismus soll sie mit $\tilde{h}^{=}(\tilde{M})$ bezeichnet werden. Es ist also $\tilde{h}^{=}(\tilde{M})$ die Menge aller $\mathfrak{a} \in \tilde{X}$ mit $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \tilde{M}$.

5.9. *Für jedes $h: X \to Y$ und jede Injektion $f: \to Y$ mit $h \nmid f$ gilt*

$$\tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f}) = \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f})).$$

Beweis. Es gelte $u = h^{-}(f)$, wegen der Isomorphie von $\mathfrak{K}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$ also auch $\tilde{u} = \tilde{h}^{-}(\tilde{f})$. Aus $\mathfrak{a} \in \tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f})$ folgt $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und wegen 5.5 auch $\mathrm{Im}f \in \tilde{h}(\mathfrak{a})$. Hieraus ergibt sich wegen $h^{-}(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}(h^{-}(f)) = \mathrm{Im}u$ weiter $\mathrm{Im}u \in \mathfrak{a}$. Wieder wegen 5.5 erhält man $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\tilde{u}$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f}))$. Umgekehrt werde $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}(\tilde{h}^{-}(\tilde{f})) = \mathrm{Bd}\tilde{u}$ vorausgesetzt. Es folgt $h^{-}(\mathrm{Im}f) = u = \mathrm{Im}u \in \mathfrak{a}$ und somit $\mathrm{Im}f \in \tilde{h}(\mathfrak{a})$, also $\tilde{h}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Bd}\tilde{f}$ und $\mathfrak{a} \in \tilde{h}^{=}(\mathrm{Bd}\tilde{f})$.

Ebenso wie in §2 ergibt sich auch hier: Zu den Objekten $\tilde{X}$ von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ gibt es eindeutig bestimmte T_1-Topologien $\tilde{\tau}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Jede Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ist hinsichtlich der Topologien $\tilde{\tau}$ stetig.

(b) Sind den Objekten aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$ Topologien τ' zugeordnet, hinsichtlich derer die Morphismen aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ebenfalls stetige Abbildungen sind, so sind die Topologien τ' mindestens so fein wie die Topologien $\tilde{\tau}$; d.h. jede $\tilde{\tau}$-abgeschlossene Menge ist auch τ'-abgeschlossen.

Jede Kategorie $\mathfrak{K}$ der in diesem Paragraphen vorausgesetzten Art bestimmt hiernach eindeutig eine T_1-Kategorie $(\widetilde{\mathfrak{K}}, \tilde{\tau})$.

Neben der Kategorie $\mathfrak{K}$ sei jetzt weiterhin eine T_1-Kategorie $(\mathfrak{K}', \tau')$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(α) Als Kategorie ist $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph; d.h. es gibt einen eineindeutigen Funktor Φ' von $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{K}$.

(β) In $\mathfrak{K}'$ gelte

$$\mathrm{Bd}(f' \wedge g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g'), \qquad \mathrm{Bd}(f' \vee g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cup (\mathrm{Bd}\, g'),$$
$$\mathrm{Bd}(\mathrm{Im}\, f') = \mathrm{Bd}\, f' \quad \text{und} \quad h'^{=}(\mathrm{Bd}\, f') = \mathrm{Bd}\,(h'^{-}(f')).$$

(γ) Zu je zwei verschiedenen Punkten x_1', x_2' eines Objekts X' existiere ein Morphismus $f'\colon \to X'$ mit $x_1' \notin \mathrm{Bd}\, f'$ und $x_2' \notin \mathrm{Bd}\, f'$ (bzw. umgekehrt).

Wegen der in (α) geforderten Isomorphie besitzt auch $\mathfrak{K}'$ die Eigenschaften, die am Anfang des Paragraphen von $\mathfrak{K}$ gefordert wurden. Insbesondere kann also jedem Objekt X' wieder eine Menge $J_{X'}'$ zugeordnet werden; und diese Zuordnung kann so getroffen werden, daß $\Phi'(J_{X'}') = J_{\Phi'(X')}$ gilt. Die in (β) enthaltenen Forderungen sind z.B. dann erfüllt, wenn $(\mathfrak{K}', \tau')$ die durch Bildmengen und deren Vereinigungen, Durchschnitte und Urbildmengen bestimmten Unterräume als Objekte, sowie die zugehörigen natürlichen Homöomorphismen als Injektionen enthält. Oder aber man setzt den Eigenschaften (S) oder (P) entsprechend voraus, daß $(\mathfrak{K}', \tau')$ mit einer Objektmenge auch den topologischen Summenraum bzw. den topologischen Produktraum als Objekt und die zugehörigen natürlichen Abbildungen als Morphismen enthält.

Der nach (α) existierende Funktor Φ' ordnet jedem Objekt X' von $\mathfrak{K}'$ ein Objekt $X = \Phi'(X')$ von $\mathfrak{K}$ zu; und diesem entspricht wieder eineindeutig ein Objekt $\tilde{X}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$. Ebenso ist jedem Morphismus f' von $\mathfrak{K}'$ ein Morphismus $f = \Phi'(f')$ von $\mathfrak{K}$ und diesem wieder der Morphismus $\tilde{f}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$ zugeordnet. Nachstehend werden immer die sich so entsprechenden Objekte bzw. Morphismen mit demselben Buchstaben bezeichnet.

5.10. *Zu jedem Objekt X' von $\mathfrak{K}'$ gibt es genau eine $1-1$-Abbildung $\vartheta_X\colon X' \to \tilde{X}$ mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Morphismus $h'\colon X' \to Y'$ gilt*

$$\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X \quad \textit{und} \quad \vartheta_Y(\mathrm{Bd}\, h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd}\, \tilde{h}).$$

Es ist ϑ_X eine stetige Abbildung von (X', τ') in (X, τ).

BEWEIS. Es sei x' ein beliebiger Punkt von X', und es gelte

$$\mathfrak{a}_{x'} = \{\Phi'(f')\colon f' \in J_{X'}',\ x' \in \mathrm{Bd}\, f'\} = \{f\colon f \in J_X,\ x' \in \mathrm{Bd}\, f'\}.$$

Jedenfalls gilt $j_X \in \mathfrak{a}_{x'}$. Aus $f \leqq g$ folgt $f = f \wedge g$ und wegen der Isomorphie von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$ auch $f' = f' \wedge g'$. Wegen (β) ergibt sich $\mathrm{Bd}\, f' = \mathrm{Bd}(f' \wedge g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g') \leqq \mathrm{Bd}\, g'$. Gilt daher $f \in \mathfrak{a}_{x'}$, also $x' \in \mathrm{Bd}\, f'$, so folgt auch $x' \in \mathrm{Bd}\, g'$ und somit $g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Ebenso folgt aus $f, g \in \mathfrak{a}_{x'}$ zunächst $x' \in (\mathrm{Bd}\, f') \cap (\mathrm{Bd}\, g') = \mathrm{Bd}(f' \wedge g')$ und somit $f \wedge g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Schließlich werde $f, g \in J_X$ und $f \vee g \in \mathfrak{a}_{x'}$ vorausgesetzt. Dann gilt wieder $x' \in \mathrm{Bd}(f' \vee g') = (\mathrm{Bd}\, f') \cup (\mathrm{Bd}\, g')$ und daher $f \in \mathfrak{a}_{x'}$ oder $g \in \mathfrak{a}_{x'}$. Somit ist $\mathfrak{a}_{x'}$ ein P-Filter, also ein Punkt von $\tilde{X}$. Durch $\vartheta_X(x') = \mathfrak{a}_{x'}$ wird daher eine Abbildung $\vartheta_X\colon X' \to \tilde{X}$ definiert.

Es seien jetzt x_1' und x_2' zwei verschiedene Punkte von X'. Wegen (γ) gibt es dann ein $f'\colon \to X'$ mit $x_1' \in \mathrm{Bd} f'$ und $x_2' \notin \mathrm{Bd} f'$. Wegen $\mathrm{Bd} f' = \mathrm{Bd}(\mathrm{Im} f')$ kann dabei sogar $f' \in J_{X'}'$, also $f \in J_X$ vorausgesetzt werden. Es folgt $f \in \vartheta_X(x_1')$ und $f \notin \vartheta_X(x_2')$, also $\vartheta_X(x_1') \neq \vartheta_X(x_2')$. Daher ist ϑ_X eine 1—1-Abbildung.

Es gelte jetzt $\mathfrak{a} = \vartheta_{Y'}(h'(x'))$. Dann ist $f \in \mathfrak{a}$ gleichwertig mit $h'(x') \in \mathrm{Bd} f'$, also gleichwertig mit $x' \in h'^{=}(\mathrm{Bd} f') = \mathrm{Bd}(h'^{-}(f'))$. Dies aber ist wiederum gleichwertig mit $h^{-}(f) \in \vartheta_X(x')$ und daher auch gleichwertig mit $f \in \tilde{h}(\vartheta_X(x'))$. Insgesamt folgt hieraus $\vartheta_Y \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$.

Weiter gelte nun $\mathfrak{a} \in \vartheta_{Y'}(\mathrm{Bd} h')$. Dann folgt trivialerweise $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\, \vartheta_{Y'}$. Zweitens gilt $\mathfrak{a} = \vartheta_{Y'}(h'(x'))$ mit einem geeigneten Punkt $x' \in X'$ und wegen $\vartheta_{Y'} \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$ dann auch $\mathfrak{a} = \tilde{h}(\vartheta_X(x'))$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{h}$. Umgekehrt werde $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\, \vartheta_{Y'}) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ vorausgesetzt. Wegen 5.5 folgt aus $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{h}$ zunächst $\mathrm{Im} h \in \mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd}\, \vartheta_{Y'}$ gibt es einen Punkt $y' \in Y'$ mit $\mathfrak{a} = \vartheta_{Y'}(y')$. Aus $\mathrm{Im} h \in \mathfrak{a}$ folgt daher $y' \in \mathrm{Bd}(\mathrm{Im} h') = \mathrm{Bd} h'$ und somit $\mathfrak{a} \in \vartheta_{Y'}(\mathrm{Bd} h')$. Zusammen hat sich damit auch die zweite Gleichung $\vartheta_{Y'}(\mathrm{Bd} h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_{Y'}) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ ergeben.

Umgekehrt seien jetzt 1—1-Abbildungen $\vartheta_{Y'}\colon Y' \to \tilde{Y}$ mit den Eigenschaften $\vartheta_{Y'} \circ h' = \tilde{h} \circ \vartheta_X$ und $\vartheta_{Y'}(\mathrm{Bd} h') = (\mathrm{Bd}\, \vartheta_{Y'}) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{h})$ gegeben. Aus $f \in \mathfrak{a} = \vartheta_Y(y')$ folgt einerseits $f \in J_Y$ und daher auch $f = \mathrm{Im} f$. Andererseits ergibt sich wegen 5.5 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Bd} \tilde{f}$, also auch $\mathfrak{a} \in (\mathrm{Bd}\, \vartheta_Y) \cap (\mathrm{Bd} \tilde{f}) = \vartheta_Y(\mathrm{Bd} f')$. Wegen der Eineindeutigkeit von $\vartheta_{Y'}$ ergibt sich hieraus schließlich $y' \in \mathrm{Bd} f'$. Umgekehrt werde $f \in J_Y$ und $y' \in \mathrm{Bd} f'$ mit $f\colon X \to Y$ vorausgesetzt. Dann gilt $y' = f'(x')$ mit einem geeigneten Punkt $x' \in X'$. Es folgt $\vartheta_Y(y') = \vartheta_Y(f'(x')) = \tilde{f}(\vartheta_X(x'))$, also $\vartheta_{Y'}(y') \in \mathrm{Bd} \tilde{f}$ und daher nach 5.5 (wegen $f \in J_Y$ gilt $f = \mathrm{Im} f$) auch $f \in \vartheta_Y(y')$. Zusammen besagt dies, daß $\vartheta_Y(y')$ gerade der oben definierte P-Filter $\mathfrak{a}_{y'}$ sein muß. Die 1—1-Abbildungen $\vartheta_{Y'}$ sind also durch die angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Schließlich sei $\tilde{A}$ eine Teilmenge von $\tilde{X}$, die bei einem geeigneten Morphismus $\tilde{h}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ Urbildmenge eines Punktes $\mathfrak{a} \in \tilde{Y}$ ist. Es gilt also $\tilde{A} = \tilde{h}^{=}(\mathfrak{a})$, und $\tilde{A}$ ist eine $\tilde{\tau}$-abgeschlossene Menge. Weiter sei nun A' die Urbildmenge von $\tilde{A}$ bei der Abbildung ϑ_X. Aus $x' \in A'$ folgt $\vartheta_Y(h'(x')) = \tilde{h}(\vartheta_X(x')) \in \tilde{h}(\tilde{A})$, also $\vartheta_Y(h'(x')) = \mathfrak{a}$. Wegen der Eineindeutigkeit von ϑ_Y gibt es aber nur genau einen Punkt $y' \in Y'$ mit $\vartheta_Y(y') = \mathfrak{a}$. Man erhält $h'(x') = y'$ und somit $h'(A') = \{y'\}$. Umgekehrt folgt aus $h'(x') = y'$ auch $\tilde{h}(\vartheta_X(x')) = \vartheta_Y(h'(x')) = \vartheta_{Y'}(y') = \mathfrak{a}$, also $\vartheta_X(x') \in \tilde{A}$ und $x' \in A'$. Daher gilt $A' = h'^{=}(y')$, und auch A' ist Urbildmenge eines Punktes bei der stetigen Abbildung h'. Es ist somit A' eine τ'-abgeschlossene Menge. Aus der Definition der Topologien $\tilde{\tau}$ folgt nun sofort, daß überhaupt die Urbildmenge jeder $\tilde{\tau}$-abgeschlossenen Menge bei der Abbildung ϑ_X eine τ'-abgeschlossene Menge ist; d.h. ϑ_X ist eine stetige Abbildung von (X', τ') in $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$.

Nach den vorher bewiesenen Sätzen ist speziell $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$ eine T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ). Es werde nun angenommen, daß $(\tilde{\mathfrak{R}}^*, \tau^*)$

ebenfalls eine T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ) ist, für die 5.10 bei Ersetzung von $(\widetilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$ durch $(\mathfrak{R}^*, \tau^*)$ gilt. Dann gibt es eindeutig bestimmte, stetige 1—1-Abbildungen $\vartheta_X^*: \widetilde{X} \to X^*$ und $\vartheta_X: X^* \to \widetilde{X}$ mit den in dem Satz angegebenen Eigenschaften. Es ist dann $\eta_X = \vartheta_X \circ \vartheta_X^*$ eine stetige 1—1-Abbildung von $\widetilde{X}$ in $\widetilde{X}$, die durch diese Eigenschaften ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Da andererseits die Identität von $\widetilde{X}$ trivialerweise diese Eigenschaften besitzt, muß η_X die Identität, die Abbildungen ϑ_X und ϑ_X^* müssen also Homöomorphismen sein. Damit hat sich ergeben:

5.11. *$(\widetilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\tau})$ ist bis auf topologische Isomorphie die einzige T_1-Kategorie mit den Eigenschaften (α) bis (γ), in die jede andere solche T_1-Kategorie im Sinn von* 5.10 *stetig eingebettet werden kann.*

Literatur

[1] BUCHSBAUM, D. A.: Exact categories and duality. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 1—34 (1955).

[2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton Mathematical Series 19. Princeton University Press 1956.

[3] EILENBERG, S., and S. MACLANE: General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc. **58**, 231—294 (1945).

[4] —, and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Mathematical Series 15. Princeton University Press 1952.

[5] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119—183 (1957).

[6] HOFMANN, F.: Über eine die Kategorie der Gruppen umfassende Kategorie. Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. d. Wiss. (1960).

[7] MACLANE, S.: Groups, categories and duality. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34**, 263—267 (1948).

[8] — Duality for groups. Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 485—516 (1950).

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 7. April 1961)

Hlawka, E.
Math. Zeitschr. 77, 273–284 (1961)

Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod. 1

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Edmund Hlawka

Einleitung

Ist x ein Punkt im euklidischen R^s $(s \geqq 1)$ mit den Koordinaten $p_1(x), \ldots, p_s(x)$, so heißt der Punkt $\bar{x}$ im Einheitswürfel E^s: $0 \leqq \xi_j < 1$ $(j = 1, \ldots, s)$ mit den Koordinaten $p_j(x) - [p_j(x)]$ $(j = 1, \ldots, s)$ ($[p]$ = nächst kleinere ganze Zahl an p) der reduzierte Punkt zu x modulo 1, $\bar{x} \equiv x \bmod 1$. Ist nun ω eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Punkten im R^s, ω_n $(n \geqq 1)$ die endliche Teilfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die zugehörigen Folgen $\overline{\omega}$ bzw. $\overline{\omega}_n$ der reduzierten Punkte. Es sei nun $Q = Q^s$: $\alpha_j \leqq \xi_j < \beta_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ ein beliebiges Intervall in $E = E^s$, $v_n(Q, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_Q(\bar{x}_j)$ (χ_Q charakteristische Funktion von Q). Nach Hermann Weyl heißt die Folge ω bzw. $\overline{\omega}$ gleichverteilt mod 1, wenn für jedes Q die Folge v_n einen Grenzwert besitzt und stets

$$\lim_{n \to \infty} v_n(Q, \omega) = V(Q) = \int_E \chi_Q(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

ist, wo $V(Q)$ also das Volumen von Q ist ($d\xi$ bedeutet das Volumselement $d\xi_1 \ldots d\xi_s$). Man nennt

$$D_n(\omega) = D(\omega_n) = \sup_{Q < E} |v_n(Q, \omega) - V(Q)| \tag{2}$$

die Diskrepanz von ω_n, welche stets $\leqq 1$ ist. Es ist bekannt, daß aus (1) folgt, daß $D_n(\omega)$ eine Nullfolge ist. Es ist eine wichtige Aufgabe, bei gegebener Folge ω, schärfere Aussagen über die Diskrepanz zu erhalten. Es ist ω genau dann gleichverteilt, wenn für jede auf E definierte komplexwertige, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion f

$$\lim_{n \to \infty} A_n(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_E f(\xi)\, d\xi = \mu(f), \tag{3}$$

und (3) gilt genau dann, wenn (3) für alle Funktionen $\exp(\langle h x \rangle)$ erfüllt ist (h Gitterpunkt im R^s, $\langle h x \rangle$ skalares Produkt von h und x, $\exp \alpha = e^{2\pi i \alpha}$). Es ist also ω genau dann gleichverteilt, wenn für alle $h \neq 0$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(h, \omega) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(\langle h\, x_k \rangle) = 0 \tag{3'}$$

ist (Weylsches Kriterium[1]), S_n oder nS_n heißen Weylsche Summen). Zwe Sätze sind nun fundamental in der Theorie der Gleichverteilung. Der ein Satz folgt sofort aus (3'): Bezeichnen wir mit $\omega(h)$ die eindimensionale Folge $\langle hx_1\rangle, \langle hx_2\rangle, \ldots$, welche wir der Folge ω: $x_1, x_2, \ldots$ zuordnen, dann ist di Folge ω genau dann gleichverteilt, wenn alle Folgen $\omega(h)$ gleichverteilt sind Der zweite Satz, von J. G. VAN DER CORPUT Hauptsatz der Gleichverteilung genannt, lautet folgendermaßen: Es sei ω_j (j natürliche Zahl) die Folg $x_{j+1}-x_1,\ x_{j+2}-x_2, \ldots$.

Dann ist ω sicher gleichverteilt, wenn für jedes j die Folge ω_j gleichverteil ist. Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, diese qualitativen durch quantitative Aussagen zu ersetzen, d.h. die Diskrepanz $D_n(\omega)$ durch die Diskrepanzen de zugehörigen Folgen $\omega(h)$ bzw. ω_j so abzuschätzen, daß die oben erwähnte Sätze als Spezialfall erhalten werden können.

Ist z.B. für die Diskrepanz von ω_j mehr bekannt als nur $o(1)$, so erhäl man schärfere Aussagen über die Diskrepanz von ω als nur die Tatsache de Gleichverteilung. Bei dem Hauptsatz der Gleichverteilung und zwar für ein dimensionale Folgen, geht diese Untersuchungsrichtung wohl auf J. M. VINO GRADOW zurück. Diese Untersuchungen wurden von J. G. VAN DER CORPU und A. PISOT[2]) systematisch durchgeführt und von J. W. S. CASSELS[3]) zu einem gewissen Abschluß gebracht. Der mehrdimensionale Fall wurde vo diesen Autoren nicht behandelt. Der erste oben zitierte Satz, welcher de Sache nach mehrdimensional ist, wurde, abgesehen von einer Arbeit vo W. S. COLES[4]) für $s=2$, noch nie behandelt. Die zitierten Autoren vermeide bei ihren Untersuchungen die Theorie der Weylschen Summen (sog. elementare Theorie der Gleichverteilung). Wir dagegen verwenden ausgiebig dies Summen, stützen uns dabei auf einen Satz von P. ERDÖS, P. TURAN un J. F. KOKSMA[5]), welcher die Diskrepanz von ω durch diese Summen schätzt Wir verwenden weiter einen Gedanken, welchen wohl zuerst H. BEHNKE fü die Untersuchung der Diskrepanz gewisser eindimensionaler Folgen angewand und J. F. KOKSMA[6]) ebenfalls für $s=1$ allgemein formuliert hat. Doch schein dieser Satz weiter nicht benutzt worden zu sein. Ich habe mich in letzte Zeit mit der Verallgemeinerung dieses Satzes auf mehrere Dimensionen befaßt[7]).

---

[1]) Vgl. zur ganzen Theorie J. F. KOKSMA: Diophantische Approximationen. Ergeb nisse der Mathematik, Bd. IV, 1936.

[2]) CORPUT, J. G. VAN DER, et CH. PISOT: Sur la discrépance modulo un. Proc. Kon Ned. Akad. v. Wet. **42**, 476—486, 554—565, 713—722 (1939).

[3]) CASSELS, J. W. S.: A new inequality with application to the theory of diophantine approximation. Math. Annalen **126**, 108—118 (1953).

[4]) COLES, W. J.: On a theorem of van der Corput on uniform distribution. Proc Cambridge **53**, 781—789 (1957).

[5]) KOKSMA, J. F.: Some theorems on Diophantine inequalities. Math. Centrum Amsterdam, Scriptum **5**, 51 S. (1950).

[6]) KOKSMA, J. F.: Ein allgemeiner Satz über die Gleichverteilung modulo 1. Einig Integrale in der Theorie der Gleichverteilung modulo 1. Mathematica, Zutphen B **11** 7—11, 49—52 (1942). [Holl.]

[7]) Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung. Annal di Matematica (IV) **54**, 325—334 (1961).

und seine Nützlichkeit für viele Fragen gezeigt. Wir werden hier nur einen Spezialfall brauchen, der einfacher hergeleitet werden kann. Mit den erwähnten Methoden werden wir die gestellten Aufgaben behandeln[8]) (Satz 2 bis 5).

§1. Zur bequemeren Formulierung wollen wir noch einige Festsetzungen treffen. Sind $t_1, \ldots, t_s$ Zahlen mit $0 < t_j \leqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, und sind $t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_i}$ alle < 1 $(i = 0$ bedeute, daß dies nicht zutrifft), während die übrigen gleich 1 sind, so nennen wir $k_1, \ldots, k_i$ den Index $\iota(t)$ und $i = i(\iota) = \dim t$ die Ordnung von ι oder auch „Dimension" von $t = (t_1, \ldots, t_s)$. Es gibt 2^s verschiedene Indizes. Es sei $T(t)$ der Quader: $0 \leqq \xi_j < t_j$ $(j = 1, \ldots, i)$. Ist $i = 0$ dann nennen wir den Index uneigentlich. Ist $\chi_T(x)$ die charakteristische Funktion von T, dann ist $\int_E \chi_T(x)\, dx = V(T)$ das $i =$ Volumen von T.

Ist eine Funktion f auf E^s gegeben, dann können wir sie stets auf den ganzen R^s als periodische Funktion mit der Periode 1 erweitern. Wir wollen diese erweiterte Funktion ebenfalls mit f bezeichnen. Sie nimmt also auf gegenüberliegenden Seitenflächen des abgeschlossenen Einheitswürfels $\overline{E}^s$ gleiche Werte an. Wir wollen nun stets $\operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|) = \|h\|$, $\prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}(1, |h_j|) = N(h)$ setzen.

Wir behaupten zunächst:

Hilfssatz 1. *Es sei $f(x)$ eine komplexwertige Funktion auf E^s, welche alle stetigen gemischten partiellen Ableitungen bis zur Ordnung s besitzt. Liegt nun eine endliche Folge ω von Punkten $x_1, \ldots, x_n$ im E^s vor, ist $D_n(\omega)$ ihre Diskrepanz, so ist stets*

$$(4) \quad |A_n(f) - \mu(f)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_E f(x)\, dx \right| \leqq D_n(\omega) \sum_{\iota}{}' \int_E \left| \frac{\partial^{i(\iota)} f(t)}{\partial t_{k_1} \ldots \partial t_{k_i}} \right| dt,$$

wo die Summation rechts sich über alle $2^s - 1$ eigentlichen Indizes erstreckt, also die Ordnung $i = i(\iota)$ stets $\geqq 1$ ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß für jedes $x \in E$

$$(5) \quad f(x) = \sum_{\iota} (-1)^{i(\iota)} \int_E \chi_{T(t)}(x) \frac{\partial^{\iota} f(t)}{\partial t_{k_1} \ldots \partial t_{k_i}}\, dt.$$

(Die Summation erstreckt sich jetzt über alle Indizes. Für $i = 0$ ist das Integral $= f(1, \ldots, 1)$).

Für $s = 1$ ist die Formel richtig, denn dann steht rechts in (5), da i nur 0 oder 1 ist

$$(5') \quad f(1) - \int_0^1 \chi_T(x) f'(t)\, dt = f(1) - \int_x^1 f'(t)\, dt = f(x),$$

da $\chi_T(x)$ genau dann $\neq 0$ ist, wenn $x \leqq t$ ist. Wir können also (5) für s als richtig annehmen und zeigen es für E^{s+1}: Jeder Punkt $t' \in E^{s+1}$ hat die Gestalt (τ, t), wo t im E^s liegt. Es ist $\iota' = \iota(t') = \iota(t)$, wenn $\tau = 1$, und $\iota(t') = \iota(t) + 1$, wenn $\tau < 1$, und es ist stets $\chi_{T(t')}^{(\xi, x)} = \chi_\tau^{(\xi)} \chi_{T(t)}^{(x)}$, wenn wir $T(\tau) = \tau$

[8]) Die Resultate wurden ohne Beweis vorgetragen im Institute for Advanced Study, Princeton, Wintersemester 1959.

setzen. Es ist also nach (5') und (5)

$$f(x') = f(\xi, x) = f(1, x) - \int_0^1 \chi_\tau(\xi) \frac{\partial f(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau$$

$$= \sum_\iota (-1)^{i(\iota)} \int_E \chi_T(x) \frac{\partial^i f(1,t)}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt - \sum_\iota (-1)^i \int_0^1 \int_E \frac{\partial^{i+1} f(\sigma, t)}{\partial \tau \, \partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} \chi_\tau(\xi) \chi_T(x) \, d\tau \, dt$$

und dies ist gerade die Behauptung für $s+1$.

Aus (5) folgt

$$\int_E f(x) \, dx = \sum_\iota (-1)^{i(\iota)} \int_{E^s} V(T(t)) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt,$$

also

$$f(x) - \mu(f) = \sum_\iota{}' (-1)^{i(\iota)} \int_E \left(\chi_T(x) - V(T)\right) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt.$$

(Für $i=0$ heben sich ja die Glieder weg.) Daraus folgt für die linke Seite von (4) innerhalb des Absolutbetrages

$$\sum_\iota{}' (-1)^{i(\iota)} \int_E \left(\nu_n(T, \omega) - V(T)\right) \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} dt. \tag{6}$$

Nun ist nach Definition von $D_n(\omega)$ die Klammer in (6) dem Betrage nach stets $\leqq D_n$, und daraus folgt die Behauptung. Aus Hilfssatz folgt sofort

SATZ 1. *Für jeden Gitterpunkt $g \neq 0$ ist*

$$|S_n(g, \omega)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp(\langle g \, x_k \rangle) \right| < (4\pi)^s D_n(\omega) N(g). \tag{7}$$

Dabei ist ω: $x_1, \dots, x_n$ eine beliebige endliche Folge.

BEWEIS. Wir nehmen im Hilfssatz 1 $f(x) = \exp\langle g \, x \rangle$. Für $g \neq 0$ ist $\mu(f) = 0$. Ist $g = (g_1, \dots, g_s)$, so ist jede gemischte Ableitung von einer Ordnung k von einem Betrag $\leqq (2\pi)^k N(g) < (2\pi)^s N(g)$. Da die Summe in (4) höchstens 2^s Summanden hat, so ist (7) bereits bewiesen.

HILFSSATZ 2. *Es ist für jedes natürliche $M \geqq 1$*

$$\left| \sum_{0 < \|g\| \leqq M} S_n(g, \omega)/N(g) \right| < 4^{4s} (1 + \log M)^s D_n(\omega). \tag{8}$$

BEMERKUNG. Formel (7) würde für die linke Seite von (8) nur eine Abschätzung $\ll M^s D_n$ liefern.

BEWEIS. Wir nehmen jetzt in Hilfssatz 1

$$f(x) = \sum_{0 < \|g\| \leqq M} N^{-1}(g) \exp\langle g \, x \rangle = \prod_{j=1}^s \left(\sum_{|h|=1}^M \frac{1}{|h|} \exp\left(h p_j(x)\right) + 1 \right) - 1.$$

Es ist

$$\left| \frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_i}} \right| \leqq (4\pi)^i \left| \prod_{j=1}^i \left(\sum_{h=1}^M \sin 2\pi h \, t_{k_j} \right) \right| \left(1 + 2 \sum_{h=1}^M \frac{1}{h} \right)^{s-i},$$

also

$$(9)\qquad \int_E \left|\frac{\partial^i f}{\partial t_{k_1}\dots\partial t_{k_i}}\right| dt < (4\pi)^i (3+2\log M)^{s-i}\left(\int_0^1 \left|\sum_{h=1}^{M}\sin 2\pi h t\right| dt\right)^i.$$

Nun ist das Integral rechts in (9) bekanntlich $<4(3+\log M)$ und daraus folgt die Behauptung.

§2. Satz 2. *Ist $\omega(h)$ die Folge $\langle h x_1\rangle, \dots, \langle h x_n\rangle$, so ist für jede natürliche Zahl M*

$$(10)\qquad D_n(\omega) < 16\cdot 30^s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|h|\leq M} D_n(\omega(h))\, N^{-1}(h)\right).$$

Bemerkung. Ist $\omega\colon x_1, x_2, \dots$ eine unendliche Folge und für jedes $h\neq 0$ die Folge $\omega(h)$ gleichverteilt, so ist also

$$\lim_{n\to\infty} D_n\omega(h)=0, \quad \text{also nach (10)} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(\omega) \ll \frac{1}{M},$$

und da M beliebig, so folgt, daß ω gleichverteilt ist. Mit (10) ist also eines der gesteckten Ziele erreicht.

Beweis. Nach Erdös-Turan-Koksma ist stets

$$(11)\qquad D_n(\omega) < 30^s\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|h|\leq M} N^{-1}(h)\, S_n(h,\omega)\right).$$

Nun ist nach (7) mit $s=1$ angewendet auf die Folge $\omega(h)$ und $g=1$

$$|S_n(h,\omega)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\langle h x_k\rangle\right| < 4\pi D_n(\omega(h)),$$

und damit ist (10) bereits bewiesen.

Wir wollen nun eine Verschärfung von Satz 2 beweisen.

Satz 3. *Gelten die gleichen Bezeichnungen wie in Satz 2, so ist sogar*

$$(12)\qquad D_n(\omega) < (31)^{s+1}\left(\frac{1}{M}+\sum_{0<|h|\leq M}^{*} D_n(\omega(h))\, N^{-1}(h)\right),$$

wo sich die Summation rechts jetzt nur über die primitiven Gitterpunkte h, d.h. jene mit größtem gemeinsamen Teiler 1 erstreckt.

Dabei kann angenommen werden, daß die erste von 0 verschiedene Koordinate in h stets >0 ist.

Bemerkung. (10) liefert nur

$$D_n(\omega) \ll \frac{1}{M} + M\sum{}^{*} D_n(\omega(h))\, N^{-1}(h).$$

Der Beweis von (12) ist bedeutend schwieriger als jener von (10) und erfordert ein Eingehen auf den Gedankengang des Beweises von (11). Es seien r und M natürliche Zahlen, $\lambda=\left[\frac{M}{r}\right]+1$, γ reell mit $0\leq\gamma<1$; dann sei

$$\varphi(M,r,\gamma,\xi)=\varphi(\xi,\gamma)$$
$$=\frac{1}{R}\int_0^{\gamma}\left(\frac{\sin\pi\lambda(t-\xi)}{\sin\pi(t-\xi)}\right)^{2r} dt = \gamma+\sum_{|h|=1}^{M} P_h\exp h\xi,$$

wo R durch $\varphi(0,1)=1$ definiert ist. Es seien weiter $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ reelle Zahlen mit $0 \leqq \gamma_j < 1$ $(j=1,\ldots,s)$ $x=(\xi_1,\ldots,\xi_s)$, $\psi(x)=\prod_{j=1}^{s}\varphi_j(\xi_j)$, wo $\varphi_j(\xi_j)=\varphi(M,r,\gamma_j,\xi_j)$ oder $\equiv 1$ für alle ξ_j. Es ist

$$\psi(x)=c_0+\sum_{0<\|h\|\leqq M} c_h \exp\langle h\,x\rangle, \qquad 0\leqq\psi\leqq 1$$

und

$$|c_0|\leqq\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ |c_h|\leqq N^{-1}(h) \qquad (h\neq 0).$$

Für einen festen primitiven Gitterpunkt $h\neq 0$ betrachten wir nun die Summe

$$\psi_h(\xi)=\sum_{|t|=1}^{L} c_{ht}\exp(t\,\xi), \quad \text{wo} \quad L=[M/\|h\|],$$

und wir behaupten:

Es ist stets

$$\int_0^1 |\psi_h'(\xi)|\,d\xi < 4/N(h). \tag{13}$$

BEWEIS. Es seien l der Komponenten von h von 0 verschieden. Es sei zunächst $l=1$, dann ist h ein Einheitsvektor und wir können o.B.d.A. $h=(1,0,\ldots,0)$ annehmen. Dann ist $\psi_h=\varphi_1(\xi)-c_0$, also das Integral in (13) gleich $\int_0^1 |\varphi_1'(\xi)|\,d\xi$. Nun ist

$$|\varphi'(\xi,\gamma)| = \frac{1}{R}\left|\left(\frac{\sin\pi\lambda(\gamma-\xi)}{\sin\pi(\gamma-\xi)}\right)^{2r}-\left(\frac{\sin\pi\lambda\xi}{\sin\pi\xi}\right)^{2r}\right|, \tag{14}$$

also ist das Integral $\leqq 2$, wenn $\varphi_1=\varphi(M,r,\gamma,\xi)$. Ist $\varphi_1\equiv 1$, dann ist alles trivial. Damit ist (13) für $l=1$ bewiesen, da ja dann $N(h)=1$ ist. Es sei jetzt also $l>1$ angenommen, also z.B. $h=(h_1,\ldots,h_l,0,\ldots,0)$. Es ist

$$\psi_h'(\xi)=2\pi i\sum_{|t|=1}^{L} t\,c_{ht}\exp(t\,\xi).$$

Beachten wir, daß

$$c_h=\int_E \psi(x)\exp(-\langle h\,x\rangle)\,dx,$$

so folgt durch partielle Integration sofort

$$(2\pi i)^{l-1}N(h)\,\psi_h'=\int_E\left(\sum_{|t|=1}^{L} t^{1-l}\left(\exp(\xi-\langle h\,x\rangle t\right)X(x)\,dx\right), \tag{14}$$

wo $X(x)=\prod_{j=1}^{s}\varphi_j'(\xi_j)$ gesetzt wurde, also ist

$$(2\pi)^{l-1}N(h)\int_0^1|\psi_h'(\xi)|\,d\xi\leqq\int_E|X(x)|\,dx\int_0^1 d\xi\left|\sum_{|t|=1}^{L} t^{1-l}\exp t(\xi-\langle h\,x\rangle)\right|.$$

Das Integral über ξ ist von $\langle h\,x\rangle$ unabhängig und gleich

$$\int_0^1 d\xi\left|\sum_{|t|=1}^{L} t^{1-l}\exp\xi\,t\right|\leqq\left(\int_0^1 d\xi\,|\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|t|=1}^{L} t^{2(1-l)}\right)^{\frac{1}{2}}<2.$$

Es ist

$$\int_E |X(x)|\,dx = \prod_{j=1}^{l} \int_0^1 |\varphi_j'(\xi)|\,d\xi \leqq 2^l$$

wie schon bemerkt wurde, also ist tatsächlich das Integral in (13) kleiner als

$$\frac{4\pi 2^l}{(2\pi)^l N(h)} < \frac{4}{N(h)}.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt damit sofort

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_h(\langle h x_k\rangle)\right| < 4 D_n\big(\omega(h)\big)/N(h). \tag{15}$$

Wir nehmen jetzt $r = 4 + [\log s]$ und setzen $M \geqq 4 + [\log s]$ voraus. Wir gehen nun analog wie beim Beweis von (11) nach J. F. Koksma vor. Dabei benützen wir, daß für $\varphi = \varphi(M, r, \gamma, \xi)$ stets gilt

$$\varphi \geqq 1 - 2\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}}\big((\lambda\xi)^{1-2r} + (\lambda(\gamma-\xi))^{1-2r}\big) \quad \text{für} \quad 0 < \xi < \gamma, \tag{16}$$

$$\varphi \leqq 2\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}}\big((\lambda(\xi-\gamma))^{1-2r} + (\lambda(1-\xi))^{1-2r}\big) \quad \text{für} \quad \gamma < \xi < 1. \tag{17}$$

Ist χ_P die charakteristische Funktion eines Parallelepipeds P: $\alpha_j \leqq \xi_j \leqq \alpha_j + \delta_j$ im E^s, dann schreiben wir $v_n(P,\omega) = \Lambda(P) = \Lambda(\chi_P)$; $V(P)$ ist stets das Volumen von P. Dann ist zunächst

$$\Lambda(P) < 2\big(V(P) + 4\cdot 2^s A\big). \tag{18}$$

Dabei sei stets

$$A = \frac{1}{\lambda} + \sum_{1<||h||\leqq M}^{*} D_n\big(\omega(h)\big)\, N^{-1}(h). \tag{19}$$

(Die Summation erstreckt sich über die primitiven Gitterpunkte.) Zum Beweis von (18) betrachten wir zunächst das Parallelepiped P^*: $\frac{1}{\lambda} \leqq \xi_j \leqq \operatorname{Min}\left(\delta_j + \frac{1}{\lambda}, 1\right)$ $(j = 1, \ldots, s)$ und setzen $\varphi_j(\xi_j) = \varphi\left(M, r, \delta_j + \frac{2}{\lambda}, \xi_j\right)$, wenn $\delta_j < 1 - \frac{2}{\lambda}$, und sonst $\equiv 1$, und betrachten die Funktion

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^{s} \varphi_j(\xi_j) = c_0 + \sum_{0<||h||\leqq M} c_h \exp\langle h x\rangle.$$

Es ist

$$|c_0| \leqq \prod_{j=1}^{s}\left(\delta_j + \frac{2}{\lambda}\right) \leqq V(P^*) + 2^{s+1}\lambda^{-1}.$$

Für jedes $x \in P^*$ ist wegen (16) stets $\psi(x) > (1 - 4^{1-r} r^{-\frac{1}{2}})^s = C$, also ist

$$\Lambda(\psi) \geqq \Lambda(\psi\chi_{P^*}) > C\,\Lambda(\chi_{P^*}),$$

also, da

$$r = 4 + [\log s], \qquad C^{-1} < (1 + 8\cdot 4^{-r} r^{-\frac{1}{2}})^s < \left(1 + \frac{1}{4s}\right)^s < e^{\frac{1}{4}} < 2,$$

also

$$\Lambda(P^*) < 2\Lambda(\psi) < 2\Big(V(P^*) + 2^{s+1}\lambda^{-1} + \sum_{0<||g||\leqq M} c_g\, S_n(g,\omega)\Big).$$

Nun ist

$$|\sum c_g S_n(g,\omega)| = \Big|\sum_{0<|h|\leq M}^{*} \sum_{|t|=1}^{L} c_{ht} S_n(th,\omega)\Big| \leq 4 \sum_{0<|h|\leq M}^{*} D_n\big(\omega(h)\big) N^{-1}(h)$$

nach (15), und daraus folgt (18) zunächst für P^*. Liegt das Parallelepiped P vor, dann ersetzen wir die Folge $\langle x_k\rangle$ durch die Folge $\langle x_k^*\rangle$ mit

$$p_j(x_k^*) = p_j(x_k) - \Big(\alpha_j - \frac{1}{\lambda}\Big) \qquad (j=1,\ldots,s).$$

Liegt x_k in P, dann x_k^* in P^*. Es ist

$$\langle h\, x_k^*\rangle - \langle h\, x_k\rangle = -\sum_{j=1}^{s} h_j\Big(\alpha_j - \frac{1}{\lambda}\Big)$$

unabhängig von k, also $D\big(\omega(h)\big) = D\big(\omega^*(h)\big)$ und damit ist (18) vollständig bewiesen. Für das offene Parallelepiped P^0: $0\leq\alpha_j<\xi_j<\alpha_j+\gamma_j<1$ $(j=1,\ldots,s)$ ist

$$\Lambda(P^0) \geq V(P^0) - 16^{s+1}A. \tag{20}$$

Wir können wie vorher o.B.d.A. $\alpha_j=0$ $(j=1,\ldots,s)$ annehmen. P sei die Hülle von P^0, ∂P der Rand, dann ist also $\chi_P = \chi_{P^0} + \chi_{\partial P}$. Es sei $\psi(x) = \prod_{j=1}^{s} \varphi_j(\xi_j)$, wo jetzt für alle $\varphi_j = \varphi(M, r, \gamma_j, \xi_j)$. Dann ist

$$\Lambda(\psi) = \Lambda(\psi\chi_{P^0}) + \Lambda(\psi\chi_{\partial P}) + \Lambda\big(\psi(1-\chi_P)\big) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3.$$

Da $0\leq\psi\leq 1$, so ist $\Lambda_1\leq\Lambda(P^0)$, also $\Lambda(P^0)\geq\Lambda(\psi) - (\Lambda_2+\Lambda_3)$. Es ist

$$\psi(x) = V(P^0) + \sum_{0<|h|\leq M} c_h \exp\langle h\, x\rangle,$$

also

$$\Lambda(\psi) \geq V(P_0) - \Big|\sum_{h\neq 0} c_h S_n(h,\omega)\Big|,$$

also wie vorher

$$\Lambda(\psi) > V(P_0) - 16^s A. \tag{20'}$$

Es ist ∂P die Vereinigungsmenge der s uneigentlichen Parallelepipede

$$Q_j\colon \quad 0\leq\xi_j<\gamma_j \qquad (j\neq k), \qquad \xi_k = 0 \qquad (k=1,\ldots,s).$$

Es ist also

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^{s} \Lambda(\psi\chi_{Q_k}) \leq \sum_{k=1}^{s} \Lambda(\chi_{Q_k}) < 8s\cdot 2^s A < 4^{s+1}A \tag{21}$$

nach (18), da $V(Q_k)=0$.

Jeder Punkt mit $\chi_P(x)=0$ liegt in einem der 2^s-1 Parallelepipede P_H: $0\leq\xi_j<\gamma_j$ für l Werte j^* und $\gamma_j\leq\xi_j<1$ für die übrigen $m=s-l$ Indizes j^{**}, und es muß $l<s$ sein, denn sonst liegt x in P. Es ist also $\Lambda_3 = \sum_H \Lambda(\psi\chi_{P_H})$. Jedes P_H überdecken wir durch Parallelepipede $P_H(k_1,\ldots,k_m) = P_H(k)$

$$\begin{cases} 0\leq\xi_j<\gamma_j & (j=j^*), \qquad \gamma_j + \dfrac{2k_j}{\lambda} \leq \xi_j < \gamma_j + \dfrac{2k_j}{\lambda} + \\ & \quad + \operatorname{Min}\Big(\dfrac{2}{\lambda}, 1-\gamma_j\Big), \quad (j=j^{**}) \end{cases} \tag{22}$$

mit $0 \leqq k_j \leqq K_j$, wo K_j die nächst kleinere natürliche Zahl $\geqq \frac{\lambda(1-\gamma_j)}{2} - 1$. Ist $K_j = 0$, dann ersetzen wir in der Definition von P_H das j^{**}-Intervall durch $\gamma_j \leqq \xi_j < 1$. Wir wenden nun (18) auf $P_H(k)$ an und beachten, daß

$$V(P_H(k)) \leqq \prod \gamma_{j^*} \prod (1-\gamma_{j^{**}}) \leqq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{s-l} \leqq \frac{2}{\lambda},$$

also ist

$$\Lambda(P_H(k)) < 10 \cdot 2^s A. \tag{23}$$

Liegt nun x im $P_H(k)$, dann ist stets $0 \leqq \varphi_j \leqq 1$, aber für $j = j^{**}$ und $1 \leqq k_j \leqq K_j - 2$ ist nach (17) sogar $\varphi_j < 2^{-7}(k_j^{-7} + (K_j - k_j)^{-7}) = L_j$ (da $r \geqq 4$), also ist für $x \in P_H(k)$

$$\psi(x) \leqq \prod_{j^{**}} C_j(k) = \prod {}^{**} C_j(k), \quad \text{wo} \quad C_j(k) = 1, \quad \text{wenn} \quad k_j = 0,\ K_j - 1,\ K_j - 2$$

und sonst L_j. Es ist also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H(k)}) \leqq \prod {}^{**} C_j(k)\, \Lambda(P_H(k)) < 10 \cdot 2^s A \prod {}^{**} C_j(k),$$

also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H}) \leqq 10 \cdot 2^s A \sum_k \prod {}^{**} C_j(k). \tag{24}$$

Nun ist die Summe rechts in (24) ja $< \prod_{j^{**}} \sum_k C_j(k)$. Nun ist

$$\sum_k C_j(k) < 3 + 2^{-6} \sum_{k=1}^{K_j - 2} k^{-7} < 3 + 2^{-6} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-7} < 4,$$

also

$$\Lambda(\psi \chi_{P_H}) < 10 \cdot 8^s A,$$

also

$$\Lambda_3 < 16 \cdot 10^s A. \tag{25}$$

(20'), (24), (25) liefern die Behauptung (20).

Betrachten wir jetzt das abgeschlossene Parallelepiped P, dann ist

$$\Lambda(P) \leqq V(P) + 16^{s+1} A. \tag{26}$$

Es ist

$$\Lambda(P) = \Lambda(\chi_P \psi) + \Lambda(\chi_P (1-\psi)), \quad \text{also} \quad \Lambda(P) \leqq \Lambda(\psi) + \Lambda(\chi_P (1-\psi)).$$

Es ist

$$\Lambda(\psi) \leqq V(P) + 4 \cdot 2^s A,$$

wie wir ja schon gezeigt haben. Es ist

$$\psi = \prod_j (1 - (1 - \varphi_j)) \geqq 1 - \sum_{j=1}^{s} (1 - \varphi_j),$$

$$\text{also} \quad \Lambda_4 = \Lambda(\chi_P (1-\psi)) \leqq \sum_j \Lambda(\chi_P (1 - \varphi_j)).$$

Wir überdecken nun P durch Parallelepipede $G = G_k(m)$

$$0 \leqq \xi_j \leqq \gamma_j \quad (j \neq k), \qquad \frac{2m}{\lambda} \leqq \xi_k \leqq \frac{2m}{\lambda} + \operatorname{Min}\left(\frac{2}{\lambda}, \gamma_k\right)$$

mit $0 \leqq m \leqq M_j$ (M_j nächst kleinere natürliche Zahl $\geqq \frac{\lambda \gamma_j}{2} - 1$; wenn $M_j = 0$ dann G: $0 \leqq \xi_j \leqq \gamma_j$). Dann ist

$$\Lambda(\chi_P(1-\varphi_k)) \leqq \sum_m \Lambda(\chi_{G_k(m)}(1-\varphi_k)) \leqq \sum_m \Lambda(\chi_{G_k(m)}) \max_{\xi_s \in G_k(m)} (1-\varphi_k(\xi_k)).$$

Nach (18) ist, da $V(G_k(m)) < \frac{2}{\lambda}$, $\Lambda(G_k(m)) < 8 \cdot 2^s A$. Weiter ist $1-\varphi_k(\xi_k)$ in $G_k(m)$ sicher $\leqq 1$, und für $1 \leqq m \leqq M_j - 2$ nach (16) sogar $< 2^{-7}(m^{-7} + (M_j - m)^{-7})$, und wir erhalten analog wie vorher $\Lambda(\chi_p(1-\varphi_k)) < 12 \cdot 8^s A$, also $\Lambda_4 < 6 \cdot 16^s A$ und damit (26). Aus (26) und (20) folgt, daß für jeden Quader Q:

$$|\Lambda(Q) - V(Q)| < 16^{s+1} A$$

ist, und dies ist die Behauptung des Satzes 3. Für $M \leqq 4 + [\log s]$ ist Satz 3 trivial.

Wir wollen jetzt $D(\omega)$ nach unten mit Hilfe von $D(\omega(h))$ abschätzen und behaupten:

SATZ 4: *Für jedes* $h \neq 0$

$$D_n^s(\omega(h)) \leqq 12^s N(h) D_n(\omega). \tag{27}$$

Sind höchstens r *Komponenten von* h *von Null verschieden, dann ist sogar*

$$D_n^r(\omega(h)) \leqq 12^r N(h) D_n(\omega). \tag{27'}$$

BEWEIS. Es sei zuerst $h = (1, 1, \ldots, 1) = e$. Dann haben wir die reduzierten Punkte von $\langle e x_k \rangle$, also Punkte $\xi_k = \sum_{j=1}^{s} (p_j(x_k) - [p_j(x_k)])$ zu betrachten und für jedes Intervall q:

$$\alpha \leqq \xi < \beta \text{ in } E: \quad 0 \leqq \xi < 1, \qquad \Delta(q) = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_q(\xi_k) - (\beta - \alpha) \right|$$

abzuschätzen. Es kann o.B.d.A. $\alpha = 0$ angenommen werden. Es liegt genau dann ξ_k in q, wenn

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x_k) - \sum_{j=1}^{s} [p_j(x_k)] < \beta,$$

also wenn x_k im s-dimensionalen Bereich

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) - \sum_{j=1}^{s} [p_j(x)] < \beta, \qquad 0 \leqq p_j(x) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

liegt. Dieser Bereich ist die Vereinigungsmenge der s Bereiche U_l:

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) - l < \beta, \; l \leqq \sum_{j=1}^{s} p_j(x) < l + 1, \qquad 0 \leqq p_i(x) < 1$$
$$(l = 0, 1, \ldots, s-1),$$

und es ist

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_q(\xi_k) - \beta = \sum_{l=0}^{s-1} \Lambda(U_l) - V(U_l).$$

Es genügt $U_0 = U$ zu betrachten. Es ist U die Vereinigungsmenge der Streifen

$$S_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t} \ (j = 1, \ldots, s-1), \quad 0 \leqq \xi_1 + \cdots + \xi_s < \beta$$

$(1 \leqq h_j \leqq t;\ t$ beliebige natürliche Zahl)

also

$$\Delta(U) - V(U) = \sum_h \left(\Delta(S_h) - V(S_h)\right).$$

Ihre Anzahl ist t^{s-1}. Jedes S_h ist aber die Vereinigungsmenge des Parallelepipeds

$$Q_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t} \ (j = 1, \ldots, s-1), \quad 0 \leqq \xi_s < \beta - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t}$$

und des Bereichs

$$R_h: \frac{h_j - 1}{t} \leqq \xi_j < \frac{h_j}{t} \ (j \neq s),$$

$$\beta - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t} \leqq \xi_s < \operatorname{Min}\left(1, \beta - (\xi_1 + \cdots + \xi_{s-1})\right).$$

Es liegt R_h im Quader

$$T_h\left(0 \leqq \xi_j - \frac{h_j - 1}{t} \leqq \frac{1}{t} \ (j \neq s), \quad 0 \leqq \xi_s - \frac{h_1 + \cdots + h_{s-1}}{t} < \frac{s-1}{t} \cap E^s\right),$$

mit einem Volumen $V(T_h) < \frac{s-1}{t^s}$. Es ist also

$$|\Delta(S_h) - V(S_h)| \leqq |\Delta(Q_h) - V(Q_h)| + |\Delta(R_h) - V(R_h)|.$$

Es ist nach Definition

$$|\Delta(Q_h) - V(Q_h)| \leqq D_n(\omega)$$

$$\Delta(R_h) - V(R_h) \leqq |\Delta(T_h) - V(T_h)| + V(T_h) \leqq D_n(\omega) + V(T_h),$$

$\Delta(R_h) - V(R_h) \geqq -V(R_h) > -V(T_h)$ also $|\Delta(R_h) - V(R_h)| \leqq D_n(\omega) + V(T_h)$

also

$$|\Delta(S_h) - V(S_h)| \leqq 2D_n(\omega) + \frac{s-1}{t^s}, \quad \text{also} \quad |\Delta(U) - V(U)| \leqq 2t^{s-1}D + \frac{s-1}{t}.$$

Nehmen wir jetzt $t = [D_s^{-\frac{1}{s}}]$, so erhalten wir die Behauptung (27) für $h = e$ mit $D_n^s(\omega(e)) \leqq 4^s D_n(\omega)$.

Beachten wir nun, daß wenn x' der Punkt $(h\,p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x))$ (h ganz $\neq 0$) ist und ω' die Folge $x_1', \ldots, x_n'$, dann ist stets $D_n(\omega') \leqq 3\,|h|\,D_n(\omega)$. Ist $h \geqq 1$, dann liegt $\bar{x}'$ genau dann in einem Quader $Q: 0 \leqq \xi_1 < \alpha_1, \ldots, 0 \leqq \xi_s < \alpha_s$, wenn x in einem der Quader $Q_k: \left(\frac{k}{h} \leqq \xi_1 < \frac{k+1}{h} \cap Q\right)$ also in $\frac{k}{h} \leqq \xi_1 < \frac{k+\alpha_1}{h}$, $0 \leqq \xi_2 < \alpha_2, \ldots, 0_s \leqq \xi < \alpha_s$ $(k = 0, 1, \ldots, h-1)$, also

$$|\Delta(Q; \omega') - V(Q)| = \left|\sum_k \left(\Delta(Q_k, \omega) - V(Q_k)\right)\right| \leqq h\,D_n(\omega).$$

Ist $h = -1$, dann liegt $\bar{x}'$ genau dann in Q, wenn $\bar{x}$ in Q': $\xi_1 = 0$, $0 \leqq \xi_2 < \alpha_2, \ldots,$ $0 \leqq \xi_s < \alpha_s$ oder in Q'': $1 - \alpha_1 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 \leqq \alpha_2, \ldots, 0 < \xi_s \leqq \alpha_s$, also

$$|\Delta(Q, \omega') - V(Q)| \leqq 2D_n(\omega).$$

Es ist also $D_n(\omega^{(h)}) \leqq 3^s N(h) D_n(\omega)$, wo $\omega^{(h)}$ die Folge $x_1^{(h)}, \ldots, x_n^{(h)}$ sei mit

$$x^{(h)} = \left(h_1 p_1(x), h_2 p_2(x), \ldots, h_s p_s(x)\right),$$

also ist

$$D_n^s\left(\omega(h)\right) = D_n^s\left(\omega^{(h)}(e)\right) \leqq 4^s D_n(\omega^{(h)}) \leqq 12^s N(h) D_n(\omega).$$

Die weitere Behauptung (27′) zeigt man analog, man hat nur die obigen Überlegungen mit r statt mit s anzuwenden.

§3. Zum Abschluß zeigen wir

SATZ 5. *Es sei ω die Folge $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, ω_j die Folge*

$$x_{j+1} - x_1, x_{j+2} - x_2, \ldots, x_n - x_{n-j} \qquad j \geqq 1.$$

Dann ist für jede natürliche Zahl q mit $1 \leqq q \leqq n$

$$D_n(\omega) < 16^s \sqrt{B}\left(1 + \log^s \frac{1}{B}\right), \tag{28}$$

wo

$$B = \left(\frac{1}{q_j} + \frac{1}{h}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1} D_{n-j}(\omega_j)\right). \tag{29}$$

Ist für die unendliche Folge ω: $x_1, x_2, \ldots, \omega_j = x_{j+1} - x_1, x_{j+2} - x_2, \ldots$ gleichverteilt, dann folgt aus (28), daß $\overline{\lim_n} D_n(\omega) \ll \frac{1}{q}$ und da q beliebig, so folgt, daß auch ω gleichverteilt ist.

BEWEIS. Wir haben nach (11) unter Benützung der Cauchyschen Ungleichung

$$D_n(\omega) < 16^s\left(\frac{1}{M} + \left(\sum_{0 < ||h|| \leqq M} N^{-1}(h)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{0 < ||h|| \leqq M} N^{-1}(h)\left|S_n(h,\omega)\right|^2\right)\right).$$

Nun ist nach der Fundamentalungleichung von VAN DER CORPUT

$$\left|S_n(h,\omega)\right|^2 \leqq \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1}\left(1 - \frac{l}{q}\right)\left(1 - \frac{n}{q}\right)\mathrm{Real}\, S_{n-j}(h,\omega_j)\right),$$

also

$$\sum_{0 < ||h|| \leqq M} N^{-1}(h)\left|S_n(h,\omega)\right|^2 \leqq \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + 2\sum_{j=1}^{q-1}\left|\sum_{0 < ||h|| \leqq M} N^{-1}(h)\, S_{n-j}(h,\omega_j)\right|\right)$$

und dies ist nach Hilfssatz 2 sicher kleiner als

$$\left(64(1 + \log M)\right)^s B,$$

also ist

$$D_n(\omega) < 16^s\left(\frac{1}{M} + \left(64(1 + \log M)\right)^s \sqrt{B}\right).$$

Wir nehmen jetzt $M = [B^{-\frac{1}{2}}] + 1$ und erhalten die Behauptung.

Wien, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. April 1961)

Neubauer, G.
Math. Zeitschr. 77, 285–294 (1961)

Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Gerhard Neubauer

Im Buch von Hille-Phillips [3], p. 718, findet sich eine Bemerkung zum bekannten Satz von Gelfand [1] für kommutative Banach-Algebren (s. z. B. [3], Theor. 24.13.1), in der darauf hingewiesen wird, daß er sich auch auf gewisse nichtkommutative Fälle ausdehnen läßt. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, daß die dort angedeutete Bedingung — nämlich Existenz einer „ausreichenden" Schar zweiseitiger maximaler Ideale — sogar notwendig ist und zu einigen weiteren Kriterien für die Gültigkeit des Satzes führt. Diese Kriterien werden im folgenden abgeleitet. Es wird außerdem versucht, sie auch auf andere als Banach-Algebren auszudehnen. Um die verschiedenen Aussagen abzugrenzen, ist eine Reihe von Beispielen angefügt.

Zuvor einiges zur Bezeichnungsweise: A sei eine Algebra über den komplexen Zahlen, nicht notwendig mit Einselement e. Wo Aussagen topologischer Natur gemacht werden, sei A ein topologischer Vektorraum und die Multiplikation in den einzelnen Variablen getrennt stetig. A braucht im allgemeinen nicht lokalkonvex zu sein. Ist $x+y-xy=0$, so heißt y Rechtsquasiinverse zu x, entsprechend sind Linksquasiinverse und Quasiinverse x^- definiert (im folgenden mit R.q.i. bzw. L.q.i. bzw. Q.i. bezeichnet). Man vgl. z. B. Hille-Phillips [3], p. 681. $\sigma'(x)$, das „algebraische" Spektrum, sei die Menge aller komplexen λ, für die x/λ keine Q.i. besitzt, und $\lambda=0$ liege in $\sigma'(a)$, wenn x keine Inverse hat. Ψ (bzw. Φ) sei die Gesamtheit aller (bzw. aller stetigen) multiplikativen linearen Funktionale auf A, die in e nicht verschwinden (falls es zu A gehört). $\Psi(x)$ bzw. $\Phi(x)$ sei die Menge aller $\psi(x)$ mit $\psi\in\Psi$ bzw. aller $\varphi(x)$ mit $\varphi\in\Phi$.

Hilfssatz 1. $\Phi(x)\subset\Psi(x)\subset\sigma'(x)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen: $\Psi(x)\subset\sigma'(x)$. Sei $\lambda=\psi(x)$. Ist $\lambda=0$, $e\notin A$, dann liegt 0 in jedem Falle in $\sigma'(x)$. Ist $e\in A$, so ist $\psi(e)\neq 0$, aber $\psi(xy)=\psi(x)\,\psi(y)=0$, also $xy\neq e$ für jedes y, d. h. $0\in\sigma'(x)$. Sei $\lambda\neq 0$, $y=x/\lambda$, dann ist $\psi(y)=1$, $\psi(y+z-yz)=\psi(y)+\psi(z)-\psi(y)\psi(z)=1\neq 0$, also $y+z-yz\neq 0$, $\lambda\in\sigma'(x)$.

Der Satz von Gelfand läßt sich nun reduzieren auf die Aussage

(G) $$\Phi(x)=\sigma'(x).$$

Alle übrigen Aussagen folgen unmittelbar (vgl. z.B. [3], Th. 24.13.1). Außer (G) wird noch folgende schwächere Eigenschaft betrachtet:

$$(G') \qquad \Psi(x) = \sigma'(x).$$

Zur Definition der regulären Ideale und ihrem Zusammenhang mit der Quasiinversion sei auf LOOMIS [6], §§ 20 und 21 verwiesen.

HILFSSATZ 2. *Jedes zweiseitige reguläre maximale Rechts-(Links-)ideal M ist ein reguläres zweiseitiges Ideal und jede Links-(Rechts-)einheit bezüglich M ist eine Einheit bezüglich M.*

BEWEIS. Sei j Linkseinheit bezüglich M, dann ist $j^2 \notin M$, A/M ist also keine Nullalgebra, nach [3], Th. 24.6.1 daher ein Schiefkörper, enthält mithin ein Einselement, das natürlich mit der Linkseinheit j zusammenfallen muß. M ist folglich ein reguläres zweiseitiges Ideal mit relativer Einheit j.

Dies braucht für beliebige (nicht maximale) Ideale nicht zu gelten:

BEISPIEL 1. A sei die durch die Relationen $b^2 = ba = 0$, $ab = b$, $a^2 = a$ ihrer Basiselemente a und b bestimmte zweidimensionale (Banach-)Algebra. a ist hier Linkseinheit, eine Rechtseinheit existiert nicht. Das (zweiseitige) Nullideal ist also nur als Rechtsideal regulär.

HILFSSATZ 3. *In A sei jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals. Dann besitzt x genau dann eine Q.i., wenn es eine R.q.i. oder eine L.q.i. besitzt. (Das gleiche gilt natürlich auch, wenn in der Voraussetzung R.q.i. durch L.q.i. ersetzt wird.*[1])

BEWEIS. x besitze keine R.q.i. Dann gibt es ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal M mit x als relativer Einheit. x kann daher auch keine L.q.i. besitzen. Es folgt: Wenn x eine L.q.i. besitzt, dann auch eine R.q.i., also auch eine Q.i. Sei nun y die R.q.i. von x, dann ist x die L.q.i. von y, y hat eine Q.i., diese muß gleich x sein, y ist die Q.i. von x.

Eine Umkehrung gilt nicht. Insbesondere ist die Folgerung des Satzes (im Gegensatz zur Voraussetzung) keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (G) in Banach-Algebren:

BEISPIEL 2. A sei die Banach-Algebra $\mathfrak{C}(\mathbf{C}^n)$ aller linearen Endomorphismen des n-dimensionalen komplexen Vektorraums. Eine singuläre Matrix hat weder Rechts- noch Linksinverse. A erfüllt also die Folgerung des Hilfssatzes, hat aber bekanntlich kein nichttriviales zweiseitiges Ideal.

SATZ 1. *(G') (bzw. (G)) gilt genau dann, wenn jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Linkseinheit bezüglich eines regulären (bzw. abgeschlossenen regulären) Rechtsideals der Kodimension 1 ist. Eine analoge Aussage gilt für Linksideale.*

BEWEIS. 1. Diese Ideale sind sämtlich maximal und zweiseitig. Sei j eine Linkseinheit zu I. Dann hat jedes $y \in A$ die Form $\alpha j + i$, $i \in I$, also $yI \subset I$, da $jI \subset I$. Die Maximalität folgt unmittelbar. Die Regularität ist notwendig

[1]) Diesen Hilfssatz wie auch einige weitere Anregungen verdanke ich Herrn ULRICH BECK, Metzingen.

für den Schluß. Das von a in Beispiel 1 erzeugte Linksideal hat die Kodimension 1, ist aber nicht zweiseitig.

2. Es gelte nun (G'). x besitze keine R.q.i., also auch keine Q.i., d.h. $1 \in \sigma'(x)$. Es gibt ein ψ mit $\psi(x)=1$. Sei $I=\{y \mid \psi(y)=0\}$. $\psi(xz-z)=\psi(x)\psi(z)-\psi(z)=0$, also ist $xz-z \in I$ für alle z. Außerdem hat I die Kodimension 1. Gilt (G), so kann man $\psi \in \Phi$ wählen und I ist abgeschlossen.

3. Sei umgekehrt die Bedingung erfüllt und $\lambda \in \sigma'(x)$. Es gilt, ein ψ zu finden mit $\psi(x)=\lambda$. Für $\lambda=0$, $e \notin A$ erfüllt $\psi \equiv 0$ die Forderung. Ist $\lambda=0$, $e \in A$, so setze man $y=e-x$, ist $\lambda \neq 0$, so sei $y=x/\lambda$. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda=1$ annehmen: x hat keine Q.i., nach 1. und Hilfssatz 3 also auch keine R.q.i., x ist mithin nach Voraussetzung Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals M der Kodimension 1, d.h. $A/M \cong \mathbf{C}$, $x \notin M$, $x^2-x \in M$. Der durch A/M definierte Homomorphismus ψ bildet x auf 1 ab. Ist M abgeschlossen, so ist ψ sogar stetig.

Das Quasiradikal Q besteht aus allen Elementen x mit $\sigma'(x) \subset \{0\}$, das Radikal R ist das größte in Q enthaltene zweiseitige Ideal (vgl. Hille-Phillips [3], p. 699. Es handelt sich hier um das Jacobsonsche Radikal). Q braucht selbst kein Ideal zu sein, ist es eines, so ist $Q=R$.

Hilfssatz 4. *Gilt* (G'), *so ist* $Q=R$.

Beweis. Q besteht aus allen Elementen mit $\sigma'(x)=\{0\}$. Denn da z.B. $\sigma'(0)=\{0\}$, kann Ψ nicht leer sein, also kann auch $\sigma'(x)$ nicht leer sein. Q ist der Durchschnitt aller Nullideale der Abbildungen ψ, mithin selbst ein Ideal, d.h. $Q=R$.

Die Umkehrung braucht selbst für Banach-Algebren nicht zu gelten:

Beispiel 3. Die formalen Potenzprodukte in zwei Variablen sind abzählbar. Sei $\{z_\nu\}$ eine solche Abzählung, d.h. die z_ν haben die Gestalt $a_1 a_2, \ldots, a_n$, wo $a_\mu = x$ oder $a_\mu = y$. A bestehe aus allen formalen Reihen $\sum \alpha_\nu z_\nu$, für die $\sum |\alpha_\nu|$ konvergiert. In A sei die Norm $\|\sum \alpha_\nu z_\nu\| = \sum |\alpha_\nu|$ eingeführt. Damit ist A offenbar ein (zu l^1 isomorpher) Banach-Raum. Nun ist $\sum\limits_\nu |\alpha_\nu| \sum\limits_\mu |\beta_\mu| = \sum\limits_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu|$, wobei die zweite Reihe konvergiert und sich beliebig umordnen und zusammenfassen läßt. Definiert man das (nichtkommutative!) Produkt von $\sum\limits_\nu \alpha_\nu z_\nu$ und $\sum\limits_\mu \beta_\mu z_\mu$, wie sich dies aus dem Produkt der einzelnen Monome ergibt, so erhält man eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_\tau \gamma_\tau z_\tau$, wo $\gamma_\tau = \sum\limits_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} \alpha_\nu \beta_\mu$ und $\langle \nu, \mu \rangle = \tau$, wenn $z_\nu z_\mu = z_\tau$. Offenbar gibt es für jedes τ nur endlich viele Paare (ν, μ) mit $\langle \nu, \mu \rangle = \tau$ und jedes Paar bestimmt genau ein τ. Also ist

$$\sum_\tau |\gamma_\tau| \leqq \sum_\tau \sum_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} |\alpha_\nu \beta_\mu| = \sum_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu| = \sum_\nu |\alpha_\nu| \sum_\mu |\beta_\mu| .$$

Das Produkt liegt in A und die Norm ist multiplikativ. A ist eine Banach-Algebra. Sei nun $a \in A$, $a \neq 0$. a hat ein Monom kleinsten Grades mit nichtverschwindendem Koeffizienten: $\alpha_\nu z_\nu$. Es soll gezeigt werden: a^2 hat ein Monom

kleinsten Grades $z_\tau = z_\nu z_\nu$ mit dem Koeffizienten α_ν^2. Daß $z_\tau = z_\nu z_\nu$ in a^2 von kleinstem Grade ist, folgt unmittelbar. Außerdem kommt α_ν^2 in der Summe von γ_τ vor. Sei nun $\tau = \langle \nu', \mu' \rangle$. Dann sind die Grade von $z_{\nu'}$ und $z_{\mu'}$, wenn ihre Koeffizienten in a nicht verschwinden, mindestens gleich dem von z_ν und, da ihre Summe gerade zweimal den Grad von z_ν ausmachen soll, sogar gleich diesem. Dann besteht aber $z_{\nu'}$ gerade aus der ersten und $z_{\mu'}$ aus der zweiten Hälfte der Faktoren von z_τ, d.h. aber $z_{\nu'} = z_{\mu'} = z_\nu$, also ist α_ν^2 der einzige Summand in $\gamma_\tau, \gamma_\tau = \alpha_\nu^2$. Es folgt durch Induktion: a^{2^n} hat ein Monom kleinsten Grades mit Koeffizienten $\alpha_\nu^{2^n}$. Also ist $\|a^{2^n}\| \geqq |\alpha_\nu|^{2^n}$ und, da nach einer bekannten Formel in Banach-Algebren $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ gilt, ist $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} \geqq |\alpha_\nu| > 0$. Es folgt $Q = \{0\}$, also auch $R = \{0\} = Q$. Da aber $xy - yx \neq 0$, also $xy - yx \notin R$, gilt nach dem folgenden Hilfssatz auch nicht (G').

HILFSSATZ 5. *Gilt* (G'), *so liegen alle Kommutatoren* $xy - yx$ *im Radikal* R.

BEWEIS. Für jedes ψ gilt $\psi(xy - yx) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = 0$. Also liegt $xy - yx$ in Q. Q ist aber nach Hilfssatz 4 gleich R.

HILFSSATZ 6. *Besitzt jeder Kommutator* $xy - yx$ *eine R.q.i., so ist jedes reguläre maximale Rechtsideal zweiseitig. Der Satz gilt auch, wenn man „Rechts" durch „Links" ersetzt.*

BEWEIS. Sei M ein solches Ideal, j eine Linkseinheit dazu. Es ist zu zeigen $AM \subset M$. Angenommen $AM \not\subset M$, dann gibt es ein x, so daß $xM \not\subset M$. $xM + M$ ist ein Rechtsideal, das M echt enthält, also ist $xM + M = A$. Es gibt folglich Elemente y und m in M mit $xy + m = j$. Sei z die R.$q.i.$ von $xy - yx$, also $xy - yx + z - (xy - yx)z = 0$. Durch Elimination von xy erhält man $j - m - yx + z - (j - m - yx)z = 0$ oder $j = (jz - z) - mz + m - y(xz) + yx$. Die rechte Seite liegt in M, also auch j im Widerspruch zur Voraussetzung, daß j Linkseinheit bezüglich M ist.

Es läßt sich nun leicht zeigen (Satz 3 unten), daß ein Teil der vorangehenden Aussagen im Fall einer Banach-Algebra mit (G) äquivalent ist. Dabei werden jedoch nur folgende Eigenschaften der Banach-Algebren benutzt:

(B) 1. *Besitzt* x *keine R.q.i.* (*keine L.q.i.*), *so ist* x *Linkseinheit* (*Rechtseinheit*) *bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals* (*Linksideals*). 2. *Jedes abgeschlossene reguläre zweiseitige maximale Ideal hat Kodimension* 1.

(B.1) folgt aus (G) (s. Satz 1), (B.2) nicht:

BEISPIEL 4. Sei A die Algebra aller komplexen Folgen $a = \{\alpha_\nu\}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Offenbar besteht $\sigma'(a)$ aus den Elementen der Folge. $\psi_n(a) = \alpha_n$ ist ein multiplikatives Funktional, also gilt (G'). Sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter von Teilmengen der ganzen Zahlen $\mathbf{N}$, der keine endlichen Mengen enthält. Die Existenz solcher Ultrafilter folgt aus dem Satz von ZORN. I enthalte alle Folgen a, die auf einer Menge $\mathbf{N}' \in \mathfrak{U}$ verschwinden. I ist ein zweiseitiges maximales Ideal, seine Kodimension ist nicht 1 (sie ist nicht einmal abzählbar). Daß I ein Ideal ist, folgt aus der Filter-

eigenschaft von $\mathfrak{U}$. Sei $a \notin I$, dann gehört die Menge der ν, für die $\alpha_\nu = 0$, nicht zu $\mathfrak{U}$, folglich gehört, da $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, ihr Komplement M zu $\mathfrak{U}$. Sei $\beta_\nu = \alpha_\nu^{-1}$ für $\nu \in \mathsf{M}$, im übrigen beliebig, $b = \{\beta_\nu\}$. Dann verschwindet $ab - e$ auf M, gehört also zu I. A/I ist ein Körper, I ist maximal. Sei $a = \{\nu\}$. Es gibt kein λ und keine unendliche Teilmenge M für die $\lambda - \nu = 0$ ist für $\nu \in \mathsf{M}$. Also gilt $a - \lambda e \notin I$ für alle λ, I hat nicht die Kodimension 1. Nun sei in A eine Topologie so eingeführt, daß alle ψ_n stetig sind (dann gilt (G)) und I abgeschlossen ist (dann gilt (B.2) nicht): Sei in A/I die feinste lokalkonvexe Topologie eingeführt, $\hat{q}$ eine (stetige) Halbnorm darin, dann ist auch $\hat{q}'(\hat{x}) = \hat{q}(\hat{a}\hat{x})$ eine Halbnorm und daher stetig. Sei $q(x) = \hat{q}(\hat{x})$, wo $\hat{x} = x + I$, $\|x\|_n = |\psi_n(x)|$. Die Topologie in A sei nun durch die Halbnormen $q_n(x) = q(x) + \|x\|_n$ eingeführt. $q_n(ax) = q'(x) + |\alpha_n| \, \|x\|_n$, also ist die Multiplikation stetig. Die ψ_n sind ebenfalls stetig und I ist abgeschlossen, da es der Durchschnitt der Nullräume der stetigen Halbnormen q ist. Es bleibt zu bemerken, daß A nicht folgenvollständig ist (A/I dagegen ist vollständig, vgl. Köthe [5], p. 217). Sei nämlich $a_n = \{\alpha_\nu^{(n)}\}$ mit $\alpha_\nu^{(n)} = 1$ für $\nu \leqq n$, $\alpha_\nu^{(n)} = 0$ für $\nu > n$. Alle a_n liegen in I. Daher ist $q(a_m - a_k) = 0$ für jedes q, außerdem $\|a_m - a_k\|_n = |\psi_n(a_m - a_k)| = 0$ für $m, k \geqq n$. Der Limes müßte in I liegen, also mindestens eine (sogar unendlich viele) verschwindende Komponenten besitzen, z. B. die ν-te. Daraus würde aber $\|a - a_n\|_\nu = 1$ folgen für $n \geqq \nu$, a_n konvergiert also gegen kein $a \in A$. Sei nun andererseits N mit der diskreten Topologie versehen. Dann ist $A = C(\mathsf{N})$. Mit der m-Topologie (Hewitt [2], Def. 3, p. 48[2])) wird A zu einem topologischen Q-Ring ([2], Th. 3 und Th. 39). Es folgt, daß die ψ_n alle stetig sind und I abgeschlossen. Es gilt also (G), aber nicht (B.2). A ist in diesem Falle sogar vollständig, wie man leicht nachprüfen kann, aber nicht lokalkonvex (es ist nicht einmal ein topologischer Vektorraum).

Es bleibt ungeklärt, ob etwa (B.2) in einer vollständigen lokalkonvexen Algebra aus (G) folgt.

A heißt eine Q-Algebra (Kaplansky [4]), wenn es eine Nullumgebung gibt, deren Elemente alle Q.i. besitzen. $(x/\lambda)^-$ heißt die Dissolvente von x im Punkte λ. x heißt spektralbeschränkt (in A), wenn die Dissolvente von x für genügend großes λ existiert, dort stetig ist und gegen 0 geht für $\lambda \to \infty$.

Satz 2. (a) *Ist A eine Q-Algebra so gilt* (B.1).

(b) *Ist A lokalkonvex und ist jedes Element in A spektralbeschränkt, so gilt* (B.2).

Beweis. a) Läßt man das Wort „abgeschlossen" aus, so gilt (B.1) für jede Algebra (Loomis [6], 21.D). In einer Q-Algebra ist aber jedes reguläre maximale Ideal abgeschlossen (Hille-Phillips [3], Th. 24.6.4). Also gilt (B.1).

b) Sei M ein abgeschlossenes zweiseitiges reguläres maximales Ideal mit relativer Einheit j. A/M ist ein Schiefkörper mit Einselement $\hat{j}$, wo $\hat{x} = x + M$. Sei x gegeben. Für große λ existiert die Dissolvente $y(\lambda) = (x/\lambda)^-$. Aus

[2]) Hewitt betrachtet reelle Algebren. Der komplexe Fall läßt sich völlig analog behandeln.

$\frac{x}{\lambda}+y(\lambda)-\frac{x}{\lambda}y(\lambda)=0$ folgt $\frac{1}{\lambda}\left(\hat{j}-\hat{y}(\lambda)\right)(\lambda\hat{j}-\hat{x})=\hat{j}$ und damit $\frac{1}{\lambda}\left(\hat{j}-\hat{y}(\lambda)\right)=(\lambda\hat{j}-\hat{x})^{-1}$. Da die Abbildung stetig ist, folgt aus der Voraussetzung, daß jedes $\hat{x}$ spektralbeschränkt ist. Die Resolvente $(\lambda\hat{j}-\hat{x})^{-1}$ ist sogar überall, wo sie definiert ist, stetig und ihr Definitionsbereich ist offen. Sei nämlich $\hat{z}=(\lambda_0\hat{j}-\hat{x})^{-1}$. $\hat{z}$ ist spektralbeschränkt. Damit ergibt sich unmittelbar (vgl. [8], 2.17), daß $(\lambda\hat{j}-\hat{x})^{-1}$ in einer Umgebung von λ_0 definiert und stetig ist. Damit ist für A/M die Bedingung (iv') in WILLIAMSON [12], Theorem 1 erfüllt. Die Bedingungen (i'), (ii) und (iii) gelten ohnehin, da M abgeschlossen ist. Also ist $A/M\cong\mathbf{C}$, d.h. M hat die Kodimension 1.

Unter die Algebren, für die Satz 2 gilt, fallen insbesondere die Banach-Algebren oder allgemeiner die Algebren mit stetigen Inversen (WAELBROECK [9]), für die im kommutativen Falle die Gültigkeit von (G) bekannt ist. Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch noch etwas allgemeiner, wie folgendes Beispiel zeigt:

BEISPIEL 5. Sei I eine überabzählbare Indexmenge. Sei A das direkte Produkt von A_1 und A_2, wo $B_i\cong\mathbf{C}$ $(i\in I)$ und A_1 (bzw. A_2) die topologische (bzw. lokalkonvexe) direkte Summe der B_i ist (vgl. KÖTHE [5], p. 217). Sei $a\in A$ d.h. $a=\{\alpha_i;\beta_i\}$, wobei nur endlich viele α_i und β_i nicht verschwinden. A ist vollständig. Die Multiplikation sei durch $\{\alpha_i;\beta_i\}\{\alpha_i';\beta_i'\}=\{0;\alpha_i\alpha_i'\}$ erklärt. A ist eine Q-Algebra. Denn jedes Element von A besitzt die Q.i. $\{\alpha_i;\beta_i\}^-=\{-\alpha_i;-(\alpha_i^2+\beta_i)\}$, wie man leicht nachprüfen kann. Für beliebiges $\lambda\neq 0$ ist $\left(\frac{1}{\lambda}\{\alpha_i;\beta_i\}\right)^-=\left\{-\frac{\alpha_i}{\lambda};-\left(\frac{\alpha_i^2}{\lambda^2}+\frac{\beta_i}{\lambda}\right)\right\}$. Die Dissolvente ist stetig in λ und geht gegen 0 für $\lambda\to\infty$. Also sind alle a spektralbeschränkt. A ist nach Konstruktion lokalkonvex. Die Quasiinversion ist aber nicht stetig. Die Ungleichung $\sum_i|\beta_i|<1$ definiert eine Nullumgebung U in A_2. Es genügt zu zeigen, daß es in A_1 in jeder beliebigen Nullumgebung Elemente gibt, deren Q.i. in A_2 eine Komponente außerhalb U hat. Die Nullumgebungen in A_1 kann man sich in der Form $\sup_i M_i|\alpha_i|<1$ geben, wo die M_i beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind. Sei eine solche Umgebung vorgegeben. Da I nicht abzählbar ist, muß es ein n geben, für das $M_i<\sqrt{n}$ gilt für unendlich viele i, insbesondere also für Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$. Sei $\alpha_i=\sqrt{n}^{-1}$ für $i=i_\nu$, $\alpha_i=0$ sonst. Dann ist $\sup_i M_i|\alpha_i|<\sqrt{n}\,n^{-1}=1$, a liegt also in der Umgebung. Für a^- gilt aber $\sum_i|\alpha_i^2|=\sum_{\nu=1}^{2n}n^{-1}=2$, a^- liegt nicht in U. Adjungiert man noch ein Einselement, so erhält man eine Algebra, die den Voraussetzungen von Satz 2 genügt, in der die Inversion aber nicht stetig ist.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch nicht notwendig für die Gültigkeit von (B). So gibt es kommutative lokal m-konvexe Algebren (MICHAEL [7]), die keine Q-Algebren sind und deren Elemente auch nicht alle spektralbeschränkt sind. Diese erfüllen aber alle (B). Auch die Lokalkonvexität ist nicht notwendig, wie die p-normierten Algebren zeigen (ŻELAZKO [13], Th. 7). Andererseits gibt es selbst vollständige lokalkonvexe Q-Algebren

— so die Algebra $\Phi(\Omega, \emptyset; \Omega)$ in [8], p. 161 — oder nicht lokalkonvexe Q-Algebren, deren Elemente alle spektralbeschränkt sind — so die erste Topologisierung von $C(t)$ in [12], p. 731 —, in denen (B.2) nicht gilt. Führt man schließlich in der Algebra A aller im Innern des Einheitskreises holomorphen und auf dem Rande noch stetigen Funktionen die Norm $\|x\| = \max\{|x(t)| \mid t$ reell, $|t| \leqq 1\}$ ein, so ist A lokalkonvex und jedes x in A spektralbeschränkt. A ist jedoch keine Q-Algebra und erfüllt auch (B.1) nicht. Die beiden letzten Algebren sind allerdings nicht vollständig.

Satz 3. *Man betrachte die folgenden Aussagen:*

1. Es gilt (G). 2. Es gilt (G'). 3. Besitzt x keine R.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 4. Besitzt x keine L.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 5. Jedes maximale reguläre Rechtsideal ist zweiseitig. 6. Jedes maximale reguläre Linksideal ist zweiseitig. 7. Jeder Kommutator $xy - yx$ liegt im Radikal. 8. Jeder Kommutator liegt im Quasiradikal. 9. Jeder Kommutator besitzt eine Q.i. 10. Jeder Kommutator besitzt eine R.q.i. 11. Jeder Kommutator besitzt eine L.q.i.

Zwischen ihnen bestehen die durch das Diagramm dargestellten Abhängigkeiten:

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \searrow\!\swarrow 1 \to 2 \to 7 \to 8 \to 9 \swarrow\!\searrow \begin{matrix} 10 \to 5 \\ 11 \to 6. \end{matrix}$$

Aus (B.1) *folgt außerdem* $5 \to 3$ *und* $6 \to 4$, *aus* (B.2) $3 \to 1$ *und* $4 \to 1$.

Gilt insbesondere (B), *so sind alle Aussagen äquivalent.*

Beweis. Die Folgerungen $1 \to 2$, $7 \to 8$, $8 \to 9$, $9 \to 10$, $9 \to 11$ ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. $2 \to 7$ ist der Inhalt von Hilfssatz 5. Hilfssatz 6 liefert $10 \to 5$ und $11 \to 6$. $1 \to 3$ und $1 \to 4$ folgen aus Satz 1. Es mögen nun (B.1) und 5 gelten. x besitze keine R.q.i., sei also Einheit bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals. Dieses ist aber nach 5 und Hilfssatz 2 ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal mit Einheit x. Analog folgt $6 \to 4$. Sei (B.2) erfüllt. Es genügt $3 \to 1$ zu zeigen. Jedes der in 3 aufgeführten Ideale hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

Die in Satz 3 enthaltene Implikation $5 \to 1$ verallgemeinert den üblichen Satz für kommutative und auch den für zweiseitige Banach-Algebren (vgl. [3], 24.9.9). Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 6. Sei A_1 (bzw. A_2) die dreidimensionale Algebra mit den Basiselementen a, b, c und den Relationen $cx = xc = 0$ für alle x, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = -ba = c$ (bzw. $cx = xc = 0$, $a^2 = b^2 = ba = 0$, $ab = c$). Sei A_1^+ (bzw. A_2^+) die durch Adjunktion eines Einselementes aus A_1 (bzw. A_2) erhaltene (Banach-) Algebra. Die Ideale in A_1^+ sind alle zweiseitig. A_1^+ ist jedoch nicht kommutativ. In A_2^+ sind alle maximalen Rechtsideale zweiseitig (A_2 ist das einzige), dagegen erzeugt b ein (nicht zweiseitiges) Rechtsideal und a ein ebensolches Linksideal. A_2^+ ist also nicht zweiseitig.

Daß einige der in den Beispielen vorkommenden Algebren Radikalalgebren sind, die vom Standpunkt des Satzes von GELFAND wenig Bedeutung haben, da er in ihnen trivialerweise gilt, hat seinen Grund darin, daß es bei den behandelten Kriterien im wesentlichen um Eigenschaften des Radikals geht. Man kann leicht Beispiele finden, die keine Radikalalgebren sind. Man erweitere etwa diese Radikalalgebren oder betrachte z.B. passende Algebren von Dreiecksmatrizen oder Integraloperatoren.

Zum Abschluß noch zwei Fälle, die in Satz 3 nicht oder nur unbefriedigend behandelt sind:

Für die vollständigen lokal m-konvexen Algebren gilt ebenfalls, wenn sie kommutativ sind, der Satz von GELFAND (MICHAEL [7], 5.6). Es gelten dort auch (B.1) und (B.2). Für die Ableitung von (B.1) wird aber auch die Kommutativität benutzt ([7], 5.9). Es ist also nicht möglich, ohne weiteres Satz 3 auf vollständige lokal m-konvexe Algebren zu übertragen. Es bleibt insbesondere die Frage, ob Kommutativität modulo dem Radikal genügt, damit (B.1) gilt (vgl. dazu [7], § 9). Dagegen ergibt sich unmittelbar eine hinreichende Bedingung aus der Darstellung der vollständigen lokal m-konvexen Algebren als projektiver Limes von Banach-Algebren. Man vgl. auch [13], § 8.

SATZ 4. *Ist A projektiver Limes (bzw. topologischer projektiver Limes) von Algebren A_i und gilt in jedem A_i (G′) (bzw. (G)), so auch in A*[3]).

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: Wenn x keine Q.i. besitzt, so existiert ein $\psi \in \Psi$ (bzw. $\in \Phi$) mit $\psi(x)=1$. Es gibt ein i, so daß $x_i=\pi_i(x)$ keine Q.i. besitzt. Der Beweis verläuft wie in [7], Th. 5.2.a. Folglich gibt es ein $\psi_i \in \Psi_i$ mit $\psi_i(x_i)=1$. $\psi(x)=\psi_i(\pi_i(x))$ ist das gewünschte Funktional. Ist A topologischer projektiver Limes und gilt (G) in A_i, so sind ψ_i und π_i stetig und damit auch ψ.

Es bleibt die Frage offen, ob bei vollständigen lokal m-konvexen Algebren die Umkehrung gilt: Es gelte (G). Existiert dann ein Fundamentalsystem von multiplikativ konvexen Nullumgebungen U_i, so daß (G) für alle $\bar{A}_i$ gilt?

Der zweite Fall betrifft ein Ergebnis von WAELBROECK ([10], § 5) über die Gültigkeit von (G′), das in Satz 5 verallgemeinert wird.

HILFSSATZ 7. *Es existiere in A eine submultiplikative Halbnorm $h(a)$ mit der Eigenschaft* $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} \leq h(a)$. *Außerdem liege jeder Kommutator $xy-yx$ im Radikal. Dann gilt* (G′).

BEWEIS. x besitze keine Q.i., sei also Einheit bezüglich eines regulären maximalen einseitigen Ideals M. Sei $M'=\{a \mid \inf\{h(a-m) \mid m \in M\}=0\}$. M' ist ein (einseitiges) Ideal, das M enthält, nach Hilfssatz 6 ist es daher zweiseitig. $x-m$ ist Einheit modulo M für jedes $m \in M$, d.h. $1 \in \sigma'(x-m)$, also $h(x-m) \geqq 1$ für alle m, $x \notin M'$. Es folgt $M=M'$. M' ist offenbar bezüglich der Halbnorm h abgeschlossen. Also ist A/M ein normierter Körper. Es folgt $A/M \cong \mathbf{C}$, M hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

[3]) Zu den Definitionen vgl. man MICHAEL [7] und KÖTHE [5], p. 232. Man beachte nur, daß die benutzten Abbildungen hier Algebrenhomomorphismen sein müssen.

SATZ 5. *Sei A lokalkonvex und folgenvollständig. Das von den Kommutatoren erzeugte zweiseitige abgeschlossene Ideal I liege im Radikal. Dann gibt es eine alle spektralbeschränkten Elemente x umfassende Teilalgebra A^*, für die* (G') *gilt.*

BEWEIS. Sei $a \in A$, $\hat{a}$ die Restklasse in A/I, $\tilde{a}$ die Restklasse in A/R. Dann ist bekanntlich $\sigma'(a)=\sigma'(\tilde{a})$. Andererseits gilt $\sigma'(a) \supset \sigma'(\hat{a}) \supset \sigma'(\tilde{a})$. Also gilt $\sigma'(a)=\sigma'(\hat{a})$. Sei $h(a)=\inf\{M \mid \{a^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. a ist genau dann spektralbeschränkt, wenn $h(a)<\infty$. A/I braucht als lokalkonvexe Algebra nicht mehr folgenvollständig zu sein. Sei darum in A die durch die lokalkonvexe Topologie bestimmte Schrankenstruktur eingeführt[4]). A ist dann eine vollständige Schrankenalgebra (algèbre à bornés). I ist auch für die Schrankenstruktur abgeschlossen. A/I ist eine vollständige Schrankenalgebra. Von der Schrankenstruktur in A/I ausgehend kann man nun definieren $h(\hat{a})=\inf\{M \mid \{\hat{a}^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. Dann ist $h(\hat{a}) \leqq h(a)$. Sei $\hat{h}(a)=h(\hat{a})$. A^* bestehe aus allen a mit $\hat{h}(a)<\infty$. A/I ist kommutativ, man erhält daher in gleicher Weise wie in [*10*], p. 47, daß $h(\hat{a})$ in A^*/I eine submultiplikative Halbnorm ist. Damit folgt das gleiche für $\hat{h}(a)$ in A^*. Es bleibt nur zu zeigen, daß für $|\lambda|>\hat{h}(a)$ die Dissolvente $(a/\lambda)^-$ existiert und in A^* liegt. Dann läßt sich Hilfssatz 7 anwenden und ergibt die Behauptung. Man kann wieder auf $\lambda=1$ reduzieren. Sei also $\hat{h}(a)<q'<q<1$. Dann ist $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ beschränkt, nach [*11*], 2.5 konvergiert also $-\sum_1^\infty \hat{a}^n$ gegen ein Element aus A/I und es folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Multiplikation in der Schrankenalgebra A/I, daß dieser Limes gleich $\hat{a}^-$ ist. Da aber $\sigma'(\hat{a})=\sigma'(a)$, existiert auch a^- und es ist $\widehat{a^-}=\hat{a}^-$. Es bleibt zu zeigen $\hat{h}(a^-)=h(\hat{a}^-)<\infty$. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $(\hat{a}^-)^m=\sum_m^\infty \gamma_{n,m}\hat{a}^n$, wo $\sum \gamma_{n,m}\hat{a}^n$ die formal gebildete Potenz der Reihe für $\hat{a}^-$ ist. $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ ist beschränkt, also gibt es eine beschränkte Menge B, so daß $\sum \alpha_n \hat{a}^n \in B$, wenn $\sum |\alpha_n|\, q'^n \leqq q(1-q)^{-1}$ ist. Es ist $\gamma_{n,2}=n$. Sei $M=(1-q'q^{-1})^{-1}$, M_1 so, daß $n \leqq M_1 M^2 (qq'^{-1})^n$. Aus $\gamma_{n,m}=\sum_\mu \gamma_{\mu,m-1}$ folgt durch Induktion $\gamma_{n,m} \leqq M_1 M^m (qq'^{-1})^n$ und damit $\sum_n |\gamma_{n,m} M^{-m}|\, q'^n \leqq M_1 \sum q^n \leqq M_1 q(1-q)^{-1}$. Also ist $\{(\hat{a}^-)^m M^{-m}\} \subset M_1 B$ und daher $h(\hat{a}^-) \leqq M$.

Literatur

[*1*] GELFAND, I.: Normierte Ringe. Matemat. Sbornik, N.S. **9** (51), 3–24 (1941).

[*2*] HEWITT, E.: Rings of real-valued continuous functions. I. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 45–99 (1948).

[*3*] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31** (1957).

[*4*] KAPLANSKY, I.: Topological Rings. Amer. J. Math. **69**, 153–183 (1947).

[*5*] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4]) Zu den Definitionen und Sätzen über Schrankenalgebren s. WAELBROECK [*11*], insbes. die Abschnitte 1.6, 2.2, 2.5 und 7.4.

[6] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953.
[7] MICHAEL, E. A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).
[8] NEUBAUER, G.: Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren. Math. Ann. **142**, 131—164 (1961).
[9] WAELBROECK, L.: Les algèbres a inverse continu. C. R. Acad. Sci. (Paris) **238**, 640—641 (1954).
[10] — Algèbres commutatives: éléments réguliers. Bull. Soc. Math. de Belgique. **9**, 42—48 (1957).
[11] — Étude spectrale des algèbres complètes. Mem. de l'Acad. Royale de Belgique, Cl. d. Sci. **31**, Fasc. 7 (1960).
[12] WILLIAMSON, J. H.: On topologizing the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 729—734 (1954).
[13] ŻELAZKO, W.: On the locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. **19**, 333—356 (1960).

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

(Eingegangen am 14. April 1961)

Inequalities

By Professor Dr. EDWIN F. BECKENBACH,
Professor of Mathematics, University of California, Los Angeles, Cal./USA,
and Dr. RICHARD BELLMAN,
Research Mathematician, The Rand Corporation, Santa Monica, Cal./USA

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 30.
Reihe: Reelle Funktionen. Besorgt von P. R. HALMOS)

Mit 6 Abbildungen. XII, 198 Seiten Gr.-8. 1961. DM 48,60
In englischer Sprache

CONTENTS

The Fundamental Inequalities and Related Matters · Positive Definite Matrices, Characteristic Roots, and Positive Matrices · Moment Spaces and Resonance Theorems · On the Positivity of Operators · Inequalities for Differential Operators · Bibliographical Notes. Name Index. Subject Index.

PREFACE

Since the classic work on inequalities by HARDY, LITTLEWOOD, and PÓLYA in 1934, an enormous amount of effort has been devoted to the sharpening and extension of the classical inequalities, to the discovery of new types of inequalities, and to the application of inequalities in many parts of analysis. As examples, let us cite the fields of ordinary and partial differential equations, which are dominated by inequalities and variational principles involving functions and their derivatives; the many applications of linear inequalities to game theory and mathematical economics, which have triggered a renewed interest in convexity and moment-space theory; and the growing uses of digital computers, which have given impetus to a systematic study of error estimates involving much sophisticated matrix theory and operator theory.

The results presented in the following pages reflect to some extent these ramifications of inequalities into contiguous regions of analysis, but to a greater extent our concern is with inequalities in their native habitat. Since it is clearly impossible to give a connected account of the burst of analytic activity of the last twenty-five years centering about inequalities, we have decided to limit our attention to those topics that have particularly delighted and intrigued us, and to the study of which we have contributed.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit

Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen

Von Dr. rer. nat. HANS HERMES, ord. Professor für Mathematische Logik und Grundlagenforschung an der Universität Münster/Westf.

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 109)

Mit 3 Abbildungen. X, 246 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 45,20; Ganzleinen DM 49,80

AUS DEM VORWORT

In diesem Buch soll eine Einführung in die Theorie der Algorithmen gegeben werden. Es wird besondere Mühe darauf verwandt, den Leser davon zu überzeugen, daß die vorgeschlagenen Präzisierungen die intuitiven Begriffe adäquat wiedergeben. Die Präzisierung, bei der man das heute am besten einsehen kann, ist der Begriff der Turingmaschine, der hier als Ausgangspunkt gewählt wird. Auf dieser Basis werden die wichtigsten konstruktiven Begriffe behandelt, wie die Begriffe der berechenbaren Funktion, der entscheidbaren Eigenschaft, und der durch ein Regelsystem erzeugbaren Menge. Es werden verschiedene andere Präzisierungen des Begriffs des Algorithmus besprochen (z.B. die μ-Rekursivität, die Rekursivität) und ihre Äquivalenz bewiesen. Als Anwendungen der Theorie werden unter anderem die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik und die Unvollständigkeit der Arithmetik bewiesen; ferner wird als wichtigste Vorstufe für den Beweis der Unlösbarkeit des Wortproblems der Gruppentheorie die Unlösbarkeit des Wortproblems für Thue-Systeme gezeigt. Die Theorie wird dargestellt vom Standpunkt der klassischen Logik. Das macht sich beonders bemerkbar durch die Verwendung des klassischen Existenzoperators, z.B. in der Definition der Berechenbarkeit: Man nennt eine Funktion berechenbar, wenn es einen Algorithmus zur Auffindung der Werte für beliebige vorgegebene Argumente gibt. — Es wird jedoch überall dort, wo Beweise *konstruktiv* durchgeführt werden, diese Tatsache besonders hervorgehoben.

Im Gegensatz zu manchen einschlägigen Publikationen wird Wert darauf gelegt, Formeln einer Sprache und das durch diese Bezeichnete zu unterscheiden, jedenfalls in den grundlegenden Definitionen.

Am Ende von verschiedenen Paragraphen finden sich einige meist leichte Übungsaufgaben, die den Leser zu selbständiger Mitarbeit anregen sollen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany